UNIVERSITATEA ”BABEŞ - BOLYAI”, CLUJ - NAPOCA

Facultatea de Matematică şi Informatică

OPERATORI DIFERENŢIALI ŞI INTEGRALI PE SPAŢII DE FUNCŢII DE O VARIABILĂ COMPLEXĂ

Rezumatul tezei de doctorat

Conducător ştiinţific prof. univ. dr. GRIGORE ŞTEFAN SĂLĂGEAN

Doctorand ELISABETA - ALINA TOTOI

Cluj - Napoca

2011

Cuprins

Introducere

Analiza complexă este una din ramurile clasice ale matematicii cu rădăcinile în secolul al XVIII-lea iar două direcţii importante ale analizei complexe sunt teoria reprezentărilor conforme şi teoria geometrică a funcţiilor analitice.

Teoria geometrică a funcţiilor de o variabilă complexă s-a conturat ca ramură aparte a analizei complexe în secolul al XX-lea când au apărut primele lucrări importante în acest domeniu, datorate lui P. Koebe [34] (1907), T.H. Gronwall [27] (1914), [28] (1916), J.W. Alexander [4] (1915), L. Bieberbach [8], [9] (1916).

Interpretarea geometrică a unor proprietăţi matematice exprimate pur analitic şi pe de altă parte exprimarea în limbaj analitic a unor proprietăţi geometrice constituie unul din obiectivele majore ale teoriei geometrice a funcţiilor analitice.

Cunoscuta Conjectură a lui Bieberbach [8] formulată în anul 1916 şi care a fost demonstrată abia în 1984 de Louis de Branges [19], a dat un impuls puternic cercetărilor din acest domeniu şi a determinat apariţia unor noi metode de cercetare, cum sunt: metoda parametrică a lui L. Löwner, metodele variaţionale (M. Schiffer [85], G.M. Goluzin [23], K. Sakaguchi [81] ş.a.), metodele bazate pe inegalităţile lui H. Grunsky [30] şi G.M. Goluzin [24], metoda punctelor extremale (L. Brickman [10], [11], T.H. MacGregor [41] ş.a) etc.

Mari matematicieni români au avut un rol deosebit la dezvoltarea acestui domeniu al matematicii. Dintre ei amintim doar două personalităţi clujene şi anume pe G. Călugăreanu, care a obţinut rezultate însemnate în domeniul funcţiilor univalente (condiţii necesare şi suficiente pentru univalenţă, raze de univalenţă) cât şi în cel al funcţiilor meromorfe, respectiv pe P.T. Mocanu, care a introdus noţiunea de α-convexitate, a obţinut criterii de univalenţă pentru funcţii neanalitice, a elaborat în colaborare cu S.S. Miller metoda subordonărilor diferenţiale şi mai recent, metoda superordonărilor diferenţiale.

În primul capitol sunt prezentate clasele $H[a, n]$, A, S, Σ_u şi Σ_0, o parte din clasele speciale de funcţii univalente (stelate, convexe, aproape convexe), subordonarea, metoda subordonărilor diferenţiale, teorema "Open Door" şi teorema referitoare la ordinul de stelarite al clasei $I_{\beta,\gamma}(S^*(\alpha))$. Penultimul paragraf al acestui capitol conţine două rezultate originale referitoare la o subclasă de funţii stelate, respectiv la o subclasă de funcţii convexe de un anumit ordin şi sunt de fapt nişte aplicaţii ale metodei subordonărilor diferenţiale (cunoscută şi sub numele de metoda funcţiilor admisibile).

În Capitolul 2 sunt prezentate noţiuni şi rezultate clasice pentru subordonările şi superordonările diferenţiale Briot-Bouquet.

Capitolul 3 este dedicat studiului funcţiilor meromorfe cu unicul pol simplu $z = 0$

şi are în structura sa 5 paragrafe. În paragraful 3.1 sunt prezentate condiţiile de stelaritate şi de convexitate pentru aceste funcţii iar în paragraful 3.2 sunt enunţate câteva rezultate referitoare la proprietăţile de stelaritate ale unui binecunoscut operator integral.

Următoarele 3 paragrafe ale Capitolului 3 conţin în întregime rezultate originale. Astfel, în paragraful 3.3 sunt definite clasa funcţiilor invers-stelate şi clasa funcţiilor invers-convexe şi sunt date teoreme de caracterizare, dualitate şi deformare referitoare la aceste clase. În paragraful 3.4 este definită clasa funcţiilor aproape invers-convexe şi sunt enunţate şi demonstrate două teoreme care pun în legătură clasa nou definită cu clasa funcţiilor invers-convexe. În paragraful 3.5 este definit un operator integral, notat cu $J^{\Phi,\varphi}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}$ şi sunt prezentate câteva propritǎţi de bază referitoare la acest operator. De asemenea, sunt puse în evidenţă şi câteva proprietăţi de stelaritate pentru operatorul particular $J^{1,1}_{\beta,\beta,\gamma,\gamma}$ notat mai simplu cu $J_{\beta,\gamma}$.

Al patrulea capitol este dedicat studiului funcţiilor meromorfe multivalente şi conţine în întregime rezultate originale.

În paragraful 4.1. este definit un operator integral, notat cu $J^{\Phi,\varphi}_{p,\alpha,\beta,\gamma,\delta}$, şi este prezentată o teoremă de existenţă referitoare la acest operator iar în paragrafele 4.2 şi 4.3 sunt studiate proprietăţile de conservare ale unor noi subclase, în urma aplicării operatorilor particulari $J_{p,\beta,\gamma}$ şi $J_{p,\gamma}$.

În paragraful 4.4 se consideră o transformare multiplicativă, notată $J^{n}_{p,\lambda}$, şi se defineşte o subclasă de funcţii meromorfe (multivalente) folosind această transformare şi condiţia de la stelaritate, după care sunt studiate proprietăţile de conservare ale acestei subclase în urma aplicării operatorului integral $J_{p,\gamma}$.

În fine, în ultimul capitol se definesc noi subclase de funcţii meromorfe multivalente folosind subordonarea şi superordonarea şi se stabilesc condiţii suficiente astfel încât prin aplicarea unuia dintre operatorii $J_{p,\beta,\gamma}$ sau $J_{p,\gamma}$ să obţinem funcţii din clase similare celor iniţiale.

Lucrarea se încheie cu o bibliografie selectivă, cuprinzând 97 de titluri, dintre care 8 aparţin autoarei.

În încheiere doresc să mulţumesc d-lui prof. univ. dr. Grigore Ştefan Sălăgean pentru îndrumarea, susţinerea şi sprijinul acordat pe tot parcursul elaborării şi redactării acestei teze. De asemenea, doresc să mulţumesc şi d-lui prof. univ. dr. Eugen Drăghici pentru încrederea şi sprijinul acordat.

Mulţumesc părinţilor mei şi tuturor celor care mi-au fost aproape şi m-au susţinut.

Cuvinte-cheie: stelaritate, convexitate, aproape-convexitate, subordonare, superordonare, operatori integrali, funcţii meromorfe, funcţii meromorfe multivalente

Capitolul 1

Noţiuni şi rezultate preliminare. Aplicaţii

În acest capitol sunt prezentate clasele $H[a,n]$, A, S, Σ_u şi Σ_0, o parte din clasele speciale de funcţii univalente (stelate, convexe, aproape convexe), subordonarea, metoda subordonărilor diferenţiale, teorema ”Open Door” şi teorema referitoare la ordinul de stelarite al clasei $I_{\beta,\gamma}(S^*(\alpha))$.

Penultimul paragraf al acestui capitol conţine două rezultate originale referitoare la o subclasă de funţii stelate, respectiv la o subclasă de funcţii convexe de un anumit ordin şi sunt publicate în [89].

1.1 Clasele $H[a,n]$, A, S, Σ_u şi Σ_0

Pentru început vom preciza câteva dintre notaţiile care apar în această lucrare. Discul cu centrul în a şi de rază r, notat cu $U(a,r)$, unde $a \in \mathbb{C}$ şi $r > 0$, îl definim prin

$$U(a,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < r\}.$$

Discul unitate, adică $U(0,1)$, îl notăm cu U şi discul $U(0,R)$ cu U_R.
Fie $H(U)$ mulţimea funcţiilor olomorfe în discul unitate U, $H_u(U)$ mulţimea funcţiilor olomorfe şi univalente (injective) în U iar pentru $a \in \mathbb{C}$ şi $n \in \mathbb{N}^*$ vom nota

$$H[a,n] = \{f \in H(U) : f(z) = a + a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \ldots\}$$

şi

$$A_n = \{f \in H(U) : f(z) = z + a_{n+1} z^{n+1} + a_{n+2} z^{n+2} + \ldots\},$$

iar pentru $n = 1$ notăm A_1 cu A.

Vom nota cu S clasa funcţiilor olomorfe şi univalente pe discul unitate, normate cu condiţiile $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, adică

$$S = \{f \in A : f \text{ este univalentă în } U\}.$$

Studiul funcţiilor meromorfe şi univalente se poate face în paralel cu clasa S, considerând clasa Σ_u a funcţiilor φ meromorfe cu unicul pol (simplu) $\zeta = \infty$ şi univalente în $U^- = \{\zeta \in \mathbb{C}_\infty : |\zeta| > 1\}$, care au dezvoltarea în seria Laurent de forma

$$\varphi(\zeta) = \zeta + \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\zeta} + \cdots + \frac{\alpha_n}{\zeta^n} + \cdots, |\zeta| > 1.$$

Fie Σ_0 subclasa funcţiilor $\varphi \in \Sigma_u$ care nu se anulează în exteriorul discului unitate, adică

$$\Sigma_0 = \{\varphi \in \Sigma_u : \varphi(\zeta) \neq 0, \zeta \in U^-\}.$$

1.2 Funcţii stelate şi funcţii convexe

Definiţia 1.2.1. *[64] Fie funcţia $f \in H(U)$ cu $f(0) = 0$. Spunem că funcţia f este stelată în U în raport cu originea (sau, pe scurt, stelată) dacă funcţia f este univalentă în U şi $f(U)$ este domeniu stelat în raport cu originea, adică pentru orice $z \in U$ segmentul care uneşte originea cu $f(z)$ este inclus în $f(U)$.*

Teorema 1.2.1. *[64]* **(teorema de caracterizare analitică a stelarităţii)** *Fie funcţia $f \in H(U)$ cu $f(0) = 0$. Atunci f este stelată dacă şi numai dacă $f'(0) \neq 0$ şi*

$$\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} > 0, \quad z \in U.$$

Definiţia 1.2.2. *[64] Vom nota cu S^* clasa funcţiilor $f \in A$ care sunt stelate (şi normate) în discul unitate, adică*

$$S^* = \left\{ f \in A : \operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} > 0,\ z \in U \right\}.$$

Definiţia 1.2.3. *[64] Funcţia $f \in H(U)$ se numeşte funcţie convexă în U (sau, pe scurt, convexă) dacă funcţia f este univalentă în U şi $f(U)$ este un domeniu convex.*

Teorema 1.2.2. *[64]* **(teorema de caracterizare analitică a convexităţii)** *Fie funcţia $f \in H(U)$. Atunci funcţia f este convexă dacă şi numai dacă $f'(0) \neq 0$ şi*

$$\operatorname{Re} \frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1 > 0,\ z \in U.$$

Definiţia 1.2.4. *[64] Vom nota cu K clasa funcţiilor $f \in A$ convexe (şi normate) în discul unitate U, adică*

$$K = \left\{ f \in A : \operatorname{Re} \frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1 > 0,\ z \in U \right\}.$$

1.3 Funcţii stelate şi funcţii convexe de un anumit ordin

Definiţia 1.3.1. *[64] Fie $\alpha < 1$. Vom defini două subclase de funcţii olomorfe după cum urmează:*

- *Clasa funcţiilor stelate de ordinul α ca fiind clasa*

$$S^*(\alpha) = \left\{ f \in A : \operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} > \alpha,\ z \in U \right\}.$$

- *Clasa funcţiilor convexe de ordinul α ca fiind clasa*

$$K(\alpha) = \left\{ f \in A : \operatorname{Re} \frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1 > \alpha,\ z \in U \right\}.$$

Se observă că pentru $\alpha = 0$ avem $S^*(0) = S^*$ şi $K(0) = K$.

1.4 Funcţii aproape convexe

Definiţia 1.4.1. *[64] Funcţia $f \in H(U)$ se numeşte aproape convexă dacă există o funcţie φ convexă în U, astfel încât*

$$\operatorname{Re} \frac{f'(z)}{\varphi'(z)} > 0,\ z \in U.$$

Definiţia 1.4.2. *[64] Vom nota cu $\mathcal{C}$ clasa funcţiilor aproape convexe şi normate în discul unitate U, adică*

$$\mathcal{C} = \left\{ f \in A : (\exists)\varphi \in K,\ \operatorname{Re} \frac{f'(z)}{\varphi'(z)} > 0,\ z \in U \right\}.$$

1.5 Subordonare

Definiţia 1.5.1. *[64] Fie $f, g \in H(U)$. Spunem că funcţia f este subordonată funcţiei g (sau g este superordonată funcţiei f) şi vom nota*

$$f \prec g \text{ sau } f(z) \prec g(z),$$

dacă există o funcţie $w \in H(U)$, cu $w(0) = 0$ şi $|w(z)| < 1$, $z \in U$, astfel încât

$$f(z) = g[w(z)],\ z \in U.$$

Teorema 1.5.1. *[73], [64] Fie $f, g \in H(U)$ şi să presupunem că g este univalentă în U. Atunci $f \prec g$ dacă şi numai dacă $f(0) = g(0)$ şi $f(U) \subseteq g(U)$.*

1.6 Metoda subordonărilor diferenţiale. Forma generală

În lucrările [44] şi [45], S.S. Miller şi P.T. Mocanu au inaugurat teoria subordonărilor diferenţiale, care a fost ulterior dezvoltată în multe alte lucrări.

Definiţia 1.6.1. *[64]*

1. *Fie $\psi : \mathbb{C}^3 \times U \to \mathbb{C}$, şi fie funcţia h univalentă în U. Dacă funcţia $p \in H[a, n]$ verifică subordonarea diferenţială*

$$\psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z) \prec h(z),\ z \in U \tag{1.1}$$

atunci funcţia p se numeşte (a, n) soluţie a subordonării diferenţiale (1.1), sau, pe scurt, soluţie a subordonării diferenţiale (1.1).

2. *Subordonarea (1.1) se numeşte subordonare diferenţială de ordinul doi, iar funcţia q univalentă în U, se numeşte (a, n) dominantă a soluţiilor subordonării diferenţiale (1.1), sau mai simplu, dominantă a subordonării diferenţiale (1.1), dacă $p(z) \prec q(z)$ oricare ar fi funcţia p care satisface (1.1).*

3. *O dominantă $\tilde{q}$ astfel încât $\tilde{q}(z) \prec q(z)$ oricare ar fi dominanta q pentru (1.1) se numeşte cea mai bună (a, n) dominantă, sau pe scurt, cea mai bună dominantă a subordonării diferenţiale (1.1).*

1.7 Clasa funcţiilor admisibile. Teoreme fundamentale

Definiţia 1.7.1. *[64] Vom nota cu Q mulţimea funcţiilor q care sunt olomorfe şi injective pe $\overline{U} \setminus E(q)$, unde*

$$E(q) = \left\{ \zeta \in \partial U : \lim_{z \to \zeta} q(z) = \infty \right\},$$

şi în plus $q'(\zeta) \neq 0$ pentru $\zeta \in \partial U \setminus E(q)$.
Mulţimea $E(q)$ se numeşte mulţime de excepţie.

Definiţia 1.7.2. *[45], [46], [64] Fie $\Omega \subset \mathbb{C}$, fie funcţia $q \in Q$ şi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Vom nota cu $\Psi_n[\Omega, q]$ clasa funcţiilor $\psi : \mathbb{C}^3 \times U \to \mathbb{C}$ care satisfac condiţia*

$$(A) \quad \psi(r, s, t; z) \notin \Omega \quad \textit{atunci când}$$

$$r = q(\zeta),\ s = m\zeta q'(\zeta),\ \mathrm{Re}\left[\frac{t}{s} + 1\right] \geq m\mathrm{Re}\left[\frac{\zeta q''(\zeta)}{q'(\zeta)} + 1\right],$$

$$\textit{unde} \quad z \in U,\ \zeta \in \partial U \setminus E(q),\ m \geq n.$$

Mulţimea $\Psi_n[\Omega, q]$ se numeşte clasa funcţiilor admisibile, iar condiţia (A) se numeşte condiţie de admisibilitate.

Teorema 1.7.1. *[47], [64] Fie* $\psi \in \Psi_n[\Omega, q]$ *unde* $q(0) = a$. *Dacă funcţia* $p \in H[a, n]$ *verifică condiţia*

$$\psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z) \in \Omega,\ z \in U,$$

atunci $p(z) \prec q(z)$.

1.8 Două subclase de funcţii speciale

Rezultatele prezentate în acest paragraf sunt originale şi sunt publicate în [89]. Pentru început vom prezenta o subclasă de funcţii stelate.

Definiţia 1.8.1. *[89] Fie* $\alpha \geq 0$ *şi* $f \in A$ *astfel încât*

$$\frac{f(z)f'(z)}{z} \neq 0,\ \alpha + \frac{zf'(z)}{f(z)} \neq 0, z \in U.$$

Spunem că funcţia f *este în clasa* N_α *dacă funcţia* $F : U \to \mathbb{C}$ *dată de expresia*

$$F(z) = zf'(z)\left(\alpha + \frac{zf'(z)}{f(z)}\right)$$

este stelată în U.

Teorema 1.8.1. *[89] Pentru orice* $\alpha \geq 0$ *avem* $N_\alpha \subset S^*$.

În continuare vom prezenta o subclasă de funcţii convexe de ordin α.

Definiţia 1.8.2. *[89] Fie* $\alpha \in [0, 1)$ *şi* $f \in A$ *cu*

$$\frac{f(z)f'(z)}{z} \neq 0, \quad 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \neq 0,\ z \in U.$$

Spunem că funcţia f *este în clasa* $N(\alpha)$ *dacă funcţia* $F : U \to \mathbb{C}$ *dată de*

$$F(z) = zf'(z)\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right),$$

este stelată de ordin α.

Teorema 1.8.2. *[89] Pentru* $\alpha \in [0, 1)$ *avem* $N(\alpha) \subset K(\alpha)$.

1.9 Teorema "Open Door"; ordinul de stelaritate al clasei $I_{\beta,\gamma}(S^*(\alpha))$

Pentru început vom defini *funcţia "Open Door"* de care vom avea nevoie în continuare.

Definiţia 1.9.1. *[64] Fie numărul $c \in \mathbb{C}$ cu $\operatorname{Re} c > 0$ şi $n \in \mathbb{N}^*$. Definim*

$$C_n = C_n(c) = \frac{n}{\operatorname{Re} c}\left[|c|\sqrt{1 + \frac{2\operatorname{Re} c}{n}} + \operatorname{Im} c\right]. \tag{1.2}$$

Dacă funcţia univalentă R este definită prin relaţia $R(z) = \dfrac{2C_n z}{1 - z^2}$, atunci vom nota cu $R_{c,n}$ funcţia "Open Door" definită prin relaţia

$$R_{c,n}(z) = R\left(\frac{z + b}{1 + \bar{b}z}\right) = 2C_n \frac{(z + b)(1 + \bar{b}z)}{(1 + \bar{b}z)^2 - (z + b)^2},$$

unde $b = R^{-1}(c)$.

Teorema 1.9.1. *[64], [48], [49]* **(teorema "Open Door" sau teorema de existenţă a integralei)** *Fie $\phi, \varphi \in H[1, n]$ cu $\phi(z)\varphi(z) \neq 0$, $z \in U$. Fie $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ astfel încât $\beta \neq 0$, $\alpha + \delta = \beta + \gamma$ şi $Re(\alpha + \delta) > 0$. Fie funcţia $f \in A_n$ şi presupunem că*

$$P(z) \equiv \alpha \frac{zf'(z)}{f(z)} + \frac{z\varphi'(z)}{\varphi(z)} + \delta \prec R_{\alpha+\delta,n}(z).$$

Dacă $F = I^{\phi,\varphi}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(f)$ este definită prin relaţia

$$F(z) = \left[\frac{\beta + \gamma}{z^\gamma \phi(z)} \int_0^z f^\alpha(t) t^{\delta - 1} \varphi(t) dt\right]^{1/\beta} = z + A_{n+1} z^{n+1} + \cdots, \tag{1.3}$$

atunci $F \in A_n$, $\dfrac{F(z)}{z} \neq 0$, $z \in U$, şi

$$\operatorname{Re}\left[\beta \frac{zF'(z)}{F(z)} + \frac{z\phi'(z)}{\phi(z)} + \gamma\right] > 0,\ z \in U. \tag{1.4}$$

(Puterile din (1.3) sunt considerate în determinarea principală).

Fie $I_{\beta,\gamma}$ operatorul definit prin relaţia

$$I_{\beta,\gamma}(f)(z) = \left[\frac{\beta + \gamma}{z^\gamma} \int_0^z f^\beta(t) t^{\gamma - 1} dt\right]^{\frac{1}{\beta}}. \tag{1.5}$$

Definiţia 1.9.2. *[64] Fie $\beta > 0$ şi $\gamma \in \mathbb{R}$ cu $\beta + \gamma > 0$. Pentru un număr dat $\alpha \in \left[-\dfrac{\gamma}{\beta}, 1\right)$ vom defini ordinul de stelaritate al clasei $I_{\beta,\gamma}(S^*(\alpha))$ ca fiind cel mai mare număr $\delta = \delta(\alpha; \beta, \gamma)$ astfel încât $I_{\beta,\gamma}(S^*(\alpha)) \subset S^*(\delta)$.*

Ordinul de stelaritate al clasei $I_{\beta,\gamma}(S^*(\alpha))$ a fost determinat în 1981 de P.T. Mocanu, D. Ripeanu şi I. Şerb în [65] iar acest rezultat va fi prezentat în continuare.

Teorema 1.9.2. *[65], [64]* **(teorema asupra ordinului de stelaritate al clasei $I_{\beta,\gamma}(S^*(\alpha))$)** *Fie $\beta > 0$, $\beta + \gamma > 0$ şi fie $I_{\beta,\gamma}$ operatorul integral defint de relaţia (1.5).*

Dacă $\alpha \in \left[-\dfrac{\gamma}{\beta}, 1\right)$ atunci ordinul de stelaritate al clasei $I_{\beta,\gamma}(S^*(\alpha))$ este

$$\delta(\alpha; \beta, \gamma) = \inf\{\operatorname{Re} q(z) : z \in U\},$$

unde

$$q(z) = \frac{1}{\beta Q(z)} - \frac{\gamma}{\beta} \text{ şi } Q(z) = \int_0^1 \left(\frac{1-z}{1-tz}\right)^{2\beta(1-\alpha)} t^{\beta+\gamma-1} dt. \tag{1.6}$$

În plus, dacă $\alpha \in [\alpha_0, 1)$, unde

$$\alpha_0 = \max\left\{\frac{\beta - \gamma - 1}{2\beta}, -\frac{\gamma}{\beta}\right\}$$

şi $g = I_{\beta,\gamma}(f)$ cu $f \in S^*(\alpha)$, atunci

$$\operatorname{Re} \frac{zg'(z)}{g(z)} \geq q(-r) = \frac{1}{\beta}\left[\frac{\gamma+\beta}{{}_2F_1(1, 2\beta(1-\alpha), \gamma+1+\beta; \frac{r}{r+1})} - \gamma\right],$$

pentru $|z| \leq r < 1$ şi

$$\delta(\alpha; \beta, \gamma) = q(-1) = \frac{1}{\beta}\left[\frac{\gamma+\beta}{{}_2F_1(1, 2\beta(1-\alpha), \gamma+1+\beta; \frac{1}{2})} - \gamma\right],$$

unde funcţia q este dată de relaţia (1.6) şi ${}_2F_1(a, b, c; z)$ este funcţia hipergeometrică de ordinul doi.

Funcţia extremală este $g = I_{\beta,\gamma}(k)$, unde $k(z) = z(1-z)^{2(\alpha-1)}$.

Capitolul 2

Subordonări şi superordonări diferenţiale de tip Briot-Bouquet

Acest capitol conţine noţiuni şi rezultate clasice pentru subordonările şi superordonările diferenţiale Briot-Bouquet.

2.1 Definiţii şi notaţii

Definiţia 2.1.1. *[64]*

1. *Printr-un operator diferenţial de tip Briot-Bouquet înţelegem un operator de forma*
$$\Phi(p(z), zp'(z)), \quad \textit{unde} \quad \Phi(r,s) = r + \frac{s}{\beta r + \gamma}.$$

2. *Fie funcţia $h \in H_u(U)$ şi fie funcţia $p \in H(U)$ cu proprietatea $p(0) = h(0)$. Printr-o subordonare diferenţială de tip Briot-Bouquet înţelegem o subordonare diferenţială de forma*
$$p(z) + \frac{zp'(z)}{\beta p(z) + \gamma} \prec h(z).$$

2.2 Dominante ale subordonării diferenţiale Briot-Bouquet

Teorema 2.2.1. *[51], [64] Fie β, $\gamma \in \mathbb{C}$, $\beta \neq 0$ şi fie h o funcţie convexă în U cu $h(0) = a$ şi $n \in \mathbb{N}^*$. Presupunem că ecuaţia diferenţială Briot-Bouquet*

$$q(z) + \frac{nzq'(z)}{\beta q(z) + \gamma} = h(z), \quad [q(0) = h(0) = a] \tag{2.1}$$

are o soluţie univalentă $q \in H(U)$ care verifică $q(z) \prec h(z)$.

Dacă $p \in H[a,n]$, atunci

$$p(z) + \frac{zp'(z)}{\beta p(z) + \gamma} \prec h(z) \Rightarrow p(z) \prec q(z)$$

iar funcţia q este cea mai bună (a,n) dominantă a subordonării de mai sus, funcţia extremală fiind $p(z) = q(z^n)$.

Teorema 2.2.2. *[51], [64] Fie β, $\gamma \in \mathbb{C}$, $\beta \neq 0$ şi fie h o funcţie convexă în U astfel încât*

$$\operatorname{Re}[\beta h(z) + \gamma] > 0,\ z \in U.$$

Dacă ecuaţia diferenţială Briot-Bouquet

$$q(z) + \frac{nzq'(z)}{\beta q(z) + \gamma} = h(z), \quad [q(0) = h(0) = a]$$

are o soluţie univalentă $q \in H_u(U)$, atunci are loc implicaţia

$$p(z) + \frac{zp'(z)}{\beta p(z) + \gamma} \prec h(z) \Rightarrow p(z) \prec q(z)$$

iar funcţia q este cea mai bună (a,n) dominantă a subordonării.

2.3 Soluţii univalente ale ecuaţiei diferenţiale Briot-Bouquet

Teorema 2.3.1. *[51], [64] Fie $\beta, \gamma \in \mathbb{C}$ şi fie funcţia convexă h care verifică*

$$\operatorname{Re}[\beta h(z) + \gamma] > 0,\ z \in U.$$

Fie q_m şi q_k soluţiile univalente ale ecuaţiei diferenţiale Briot-Bouquet

$$q(z) + \frac{nzq'(z)}{\beta q(z) + \gamma} = h(z), \quad [q(0) = h(0)]$$

pentru $n = m$, respectiv $n = k$.

Dacă $m|k$ (m divide k), atunci $q_k(z) \prec q_m(z) \prec h(z)$. În particular, $q_k(z) \prec q_1(z) \prec h(z)$.

Teorema 2.3.2. *[51], [64] Fie $\beta, \gamma \in \mathbb{C}$, $\beta \neq 0$ şi fie funcţia $h \in H(U)$ cu $h(0) = a$ astfel încât $\operatorname{Re} c > 0$, unde $c = \beta a + \gamma$. Dacă*

$$\beta h(z) + \gamma \prec R_{c,n}(z),$$

atunci soluţia q a ecuaţiei diferenţiale Briot-Bouquet

$$q(z) + \frac{nzq'(z)}{\beta q(z) + \gamma} = h(z), \tag{2.2}$$

cu $q(0) = a$, *este analitică în* U *şi verifică relaţia* $\mathrm{Re}\,[\beta q(z) + \gamma] > 0$, $z \in U$.

Dacă $a \neq 0$, *atunci soluţia ecuaţiei de mai sus este*

$$q(z) = z^{\frac{\gamma}{n}} H^{\frac{\beta a}{n}}(z) \left[\frac{\beta}{n} \int_0^z H^{\frac{\beta a}{n}}(t) t^{\frac{\gamma}{n}-1} dt \right]^{-1} - \frac{\gamma}{\beta} =$$

$$= \left[\frac{\beta}{n} \int_0^1 \left[\frac{H(tz)}{H(z)} \right]^{\frac{\beta a}{n}} t^{\frac{\gamma}{n}-1} dt \right]^{-1} - \frac{\gamma}{\beta}, \tag{2.3}$$

unde

$$H(z) = z \exp \int_0^z \frac{h(t) - a}{at} dt.$$

Dacă $a = 0$, *atunci soluţia ecuaţiei de mai sus este*

$$q(z) = H^{\frac{\gamma}{n}}(z) \left[\frac{\beta}{n} \int_0^z H^{\frac{\gamma}{n}}(t) t^{-1} dt \right]^{-1} - \frac{\gamma}{\beta} =$$

$$= \left[\frac{\beta}{n} \int_0^1 \left[\frac{H(tz)}{H(z)} \right]^{\frac{\gamma}{n}} t^{-1} dt \right]^{-1} - \frac{\gamma}{\beta},$$

unde

$$H(z) = z \exp \frac{\beta}{\gamma} \int_0^z \frac{h(t)}{t} dt.$$

2.4 Teoria generală a superordonărilor diferenţiale

Menţionăm că rezultatele prezentate în continuare au fost publicate pentru prima dată de către S.S. Miller şi P.T. Mocanu în 2003 în [53].

Definiţia 2.4.1. *[16], [53]*

1. *Fie* $\varphi : \mathbb{C}^3 \times U \to \mathbb{C}$ *şi fie funcţia* h *analitică în* U. *Dacă funcţiile* p *şi* $\varphi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z)$ *sunt univalente în* U *şi verifică superordonarea diferenţială (de ordinul doi)*

   $$h(z) \prec \varphi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z) \tag{2.4}$$

   atunci funcţia p *se numeşte soluţie a superordonării diferenţiale (2.4).*

2. *O funcţie* q *analitică în* U, *se numeşte subordonantă a soluţiilor superordonării diferenţiale (2.4), sau mai simplu, subordonantă, dacă* $q \prec p$ *oricare ar fi funcţia* p *care satisface (2.4).*

3. *O subordonantă* $\tilde{q}$ *univalentă şi care satisface* $q \prec \tilde{q}$ *pentru orice subordonantă* q *a superordonării (2.4) se numeşte cea mai bună subordonantă a superordonării diferenţiale (2.4). Facem observaţia că cea mai bună subordonantă este unică abstracţie făcând de o rotaţie în* U.

Definiţia 2.4.2. *[16], [53] Fie $\Omega \subset \mathbb{C}$ şi $q \in H[a,n]$. Clasa funcţiilor admisibile $\Phi_n[\Omega, q]$ este constituită din acele funcţii $\varphi : \mathbb{C}^3 \times \overline{U} \to \mathbb{C}$ care satisfac condiţia de admisibilitate:*

$$\varphi(r,s,t;\zeta) \in \Omega \quad \textit{atunci când} \tag{2.5}$$

$$r = q(z),\ s = \frac{zq'(z)}{m},\ \mathrm{Re}\,\frac{t}{s} + 1 \leq \frac{1}{m}\mathrm{Re}\left[\frac{zq''(z)}{q'(z)} + 1\right],$$

unde $\zeta \in \partial U$, $z \in U$ şi $m \geq n \geq 1$. Pentru $n = 1$ vom nota $\Phi_1[\Omega, q]$ cu $\Phi[\Omega, q]$.

Dacă $\varphi : \mathbb{C}^2 \times \overline{U} \to \mathbb{C}$, atunci condiţia de admisibilitate (2.5) se reduce la

$$\varphi\left(q(z), \frac{zq'(z)}{m}; \zeta\right) \in \Omega,$$

unde $z \in U, \zeta \in \partial U$ şi $m \geq n \geq 1$.

Următoarea teoremă prezintă un rezultat "cheie" în teoria superordonărilor diferenţiale de ordinul întâi şi doi.

Teorema 2.4.1. *[16], [53] Fie $\Omega \subset \mathbb{C}$, $q \in H[a,n]$ şi fie $\varphi \in \Phi_n[\Omega, q]$. Dacă $p \in Q(a)$ şi $\varphi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z)$ este univalentă în U, atunci*

$$\Omega \subset \{\varphi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z) : z \in U\}$$

implică $q(z) \prec p(z)$.

2.5 Superordonări diferenţiale de tip Briot-Bouquet

Fie $\beta, \gamma \in \mathbb{C}$, Ω_1, $\Delta_1 \subset \mathbb{C}$, şi $p \in H(U)$. În acest paragraf ne vom ocupa de implicaţii de forma:

$$\Omega_1 \subset \left\{p(z) + \frac{zp'(z)}{\beta p(z) + \gamma} : z \in U\right\} \Rightarrow \Delta_1 \subset p(U),$$

şi vom încerca să determinăm cea mai largă mulţime $\Delta_1 \subset \mathbb{C}$ pentru care are loc implicaţia dată mai sus.

Dacă Ω_1, $\Delta_1 \subset \mathbb{C}$ sunt domenii simplu conexe diferite de $\mathbb{C}$, atunci putem rescrie implicaţia de mai sus în termeni de superordonări astfel:

$$h_1(z) \prec p(z) + \frac{zp'(z)}{\beta p(z) + \gamma} \Rightarrow q_1(z) \prec p(z). \tag{2.6}$$

Partea din stânga a implicaţiei (2.6) se numeşte superordonare diferenţială de tip Briot-Bouquet.

Corolarul 2.5.1. *[16], [54] Fie $\beta, \gamma \in \mathbb{C}$, h o funcţie convexă în U cu $h(0) = a$. Presupunem că ecuaţia diferenţială*

$$q(z) + \frac{zq'(z)}{\beta q(z) + \gamma} = h(z)$$

are o soluţie univalentă q care satisface $q(0) = a$ şi $q(z) \prec h(z)$.
Dacă $p \in H[a, 1] \cap Q$ şi presupunem că funcţia $p(z) + \dfrac{zp'(z)}{\beta p(z) + \gamma}$ este univalentă în U, atunci

$$h(z) \prec p(z) + \frac{zp'(z)}{\beta p(z) + \gamma} \Rightarrow q(z) \prec p(z).$$

Funcţia q este cea mai bună subordonantă.

Corolarul 2.5.2. *[16], [54] Fie $h \in H(U)$ cu $h(0) = a$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ cu $\operatorname{Re}[\beta a + \gamma] > 0$. Presupunem că*

$$(i) \quad \beta h(z) + \gamma \prec R_{\beta a+\gamma}(z).$$

Fie q soluţia analitică a ecuaţiei diferenţiale Briot-Bouquet

$$h(z) = q(z) + \frac{zq'(z)}{\beta q(z) + \gamma}$$

şi presupunem că

$$(ii) \quad \frac{zq'(z)}{\beta q(z) + \gamma} \quad \text{este stelată în } U.$$

Dacă $p \in H[a, 1] \cap Q$ şi funcţia $p(z) + \dfrac{zp'(z)}{\beta p(z) + \gamma}$ este univalentă în U, atunci

$$h(z) \prec p(z) + \frac{zp'(z)}{\beta p(z) + \gamma} \Rightarrow q(z) \prec p(z).$$

Funcţia q este cea mai bună subordonantă.

Capitolul 3

Operatori integrali pe subclase speciale ale clasei Σ a funcţiilor meromorfe

Acest capitol este dedicat studiului funcţiilor meromorfe cu unicul pol simplu $z = 0$ şi are în structura sa 5 paragrafe. În paragraful 3.1 sunt prezentate condiţiile de stelaritate şi de convexitate pentru aceste funcţii iar în paragraful 3.2 sunt enunţate câteva rezultate referitoare la proprietăţile de stelaritate ale unui binecunoscut operator integral.

Ultimele 3 paragrafe ale acestui capitol conţin în întregime rezultate originale care sunt publicate în [90] şi [92].

Astfel, în paragraful 3.3 sunt definite clasa funcţiilor invers-stelate şi clasa funcţiilor invers-convexe şi sunt date teoreme de caracterizare, dualitate şi deformare referitoare la aceste clase. În paragraful 3.4 este definită clasa funcţiilor aproape invers-convexe şi sunt enunţate şi demonstrate două teoreme care pun în legătură clasa nou definită cu clasa funcţiilor invers-convexe. În paragraful 3.5 este definit un operator integral, notat cu $J^{\Phi,\varphi}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}$ şi sunt prezentate câteva proprităţi de bază referitoare la acest operator. De asemenea, sunt puse în evidenţă şi câteva proprietăţi de stelaritate pentru operatorul particular $J^{1,1}_{\beta,\beta,\gamma,\gamma}$ notat mai simplu cu $J_{\beta,\gamma}$.

3.1 Condiţii de stelaritate şi convexitate pentru funcţii meromorfe

Fie funcţia

$$\varphi(\zeta) = \zeta + \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\zeta} + \cdots + \frac{\alpha_n}{\zeta^n} + \cdots,\ \zeta \in U^-, \tag{3.1}$$

o funcţie meromorfă în U^-, cu unicul pol simplu $\zeta = \infty$. Vom nota, ca de obicei, mulţimea $E(\varphi) = \mathbb{C} \setminus \varphi(U^-)$, unde $U^- = \{\zeta \in \mathbb{C}_\infty : |\zeta| > 1\}$.

Definiţia 3.1.1. *[64] Spunem că funcţia φ de forma (3.1) este funcţie stelată în U^- dacă φ este univalentă în U^- şi mulţimea $E(\varphi)$ este stelată în raport cu originea.*

Definiţia 3.1.2. *[64] Vom nota cu Σ^* clasa funcţiilor stelate în exteriorul discului unitate, adică*

$$\Sigma^* = \{\varphi \in \Sigma_0 : \varphi \text{ este stelată în } U^-\}.$$

Definiţia 3.1.3. *[64] Fie funcţia $g(z) = \dfrac{1}{z} + \alpha_0 + \alpha_1 z + \cdots + \alpha_n z^n + \cdots$, $0 < |z| < 1$, o funcţie meromorfă în U. Spunem că funcţia g este stelată în $\dot{U}$ dacă funcţia $\varphi(\zeta) = g\left(\dfrac{1}{\zeta}\right)$, $\zeta \in U^-$, este stelată în U^-.*

Teorema 3.1.1. *[64]* **(teorema de caracterizare analitică a stelarităţii funcţiilor meromorfe)** *Fie $g(z) = \dfrac{1}{z} + \alpha_0 + \alpha_1 z + \cdots$, $0 < |z| < 1$, o funcţie meromorfă în U cu $g(z) \neq 0$, $z \in \dot{U}$. Atunci funcţia g este stelată în $\dot{U}$ dacă şi numai dacă g este univalentă în $\dot{U}$ şi*

$$\mathrm{Re}\left[-\frac{zg'(z)}{g(z)}\right] > 0,\ z \in \dot{U}.$$

Definiţia 3.1.4. *[64] Spunem că funcţia φ de forma (3.1) este funcţie convexă în U^- dacă φ este univalentă în U^- şi mulţimea $E(\varphi)$ este convexă.*

Definiţia 3.1.5. *Fie funcţia $g(z) = \dfrac{1}{z} + \alpha_0 + \alpha_1 z + \cdots + \alpha_n z^n + \cdots$, $0 < |z| < 1$, o funcţie meromorfă în U. Spunem că funcţia g este convexă în $\dot{U}$ dacă funcţia $\varphi(\zeta) = g\left(\dfrac{1}{\zeta}\right)$, $\zeta \in U^-$, este convexă în U^-.*

Teorema 3.1.2. *[64]* **(teorema de caracterizare analitică a convexităţii funcţiilor meromorfe)** *Fie $g(z) = \dfrac{1}{z} + \alpha_0 + \alpha_1 z + \cdots$, $0 < |z| < 1$, o funcţie meromorfă în U cu $g(z) \neq 0$, $z \in \dot{U}$. Atunci funcţia g este convexă în $\dot{U}$ dacă şi numai dacă g este univalentă în $\dot{U}$ şi*

$$\mathrm{Re}\left[-\left(\frac{zg''(z)}{g'(z)} + 1\right)\right] > 0,\ z \in \dot{U}.$$

3.2 Operatori integrali pe spaţii de funcţii meromorfe stelate

În continuare vom nota cu Σ clasa funcţiilor meromorfe în discul unitate de forma

$$f(z) = \frac{1}{z} + a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots,\ z \in \dot{U},$$

iar cu Σ_0 mulţimea funcţiilor $f \in \Sigma$ care sunt univalente în $\dot{U}$ şi cu $f(z) \neq 0$, $z \in \dot{U}$.

Definiţia 3.2.1. *[64]Pentru un număr $\alpha < 1$ fie*

$$\Sigma^*(\alpha) = \left\{ f \in \Sigma : \operatorname{Re} \left[-\frac{zf'(z)}{f(z)} \right] > \alpha,\ z \in \dot{U} \right\}$$

clasa funcţiilor meromorfe şi stelate de ordinul α.

Pentru un număr $\gamma \in \mathbb{C}$ cu $\operatorname{Re}\gamma > 0$ vom considera operatorul integral

$$I_\gamma : \Sigma \to \Sigma$$

definit prin relaţia

$$I_\gamma(f)(z) = \frac{\gamma}{z^{\gamma+1}} \int_0^z t^\gamma f(t)dt = \gamma \int_0^1 u^\gamma f(uz)du. \tag{3.2}$$

Proprietăţi ale acestui operator integral definit pe diverse subclase de funcţii meromorfe au fost studiate în diverse lucrări dintre care amintim [6], [25], [66], [77], [83], [84].

Teorema 3.2.1. *[64], [66] Fie numerele $0 \le \alpha < 1$ şi $0 < \gamma \le 1$. Atunci are loc $I_\gamma[\Sigma^*(\alpha)] \subset \Sigma^*(\beta)$, unde*

$$\beta = \beta(\alpha, \gamma) = \frac{1}{4} \left[2\alpha + 2\gamma + 3 - \sqrt{[2(\gamma - \alpha) + 1]^2 + 8\gamma} \right] \tag{3.3}$$

şi operatorul I_γ este definit prin relaţia (3.2).

Se verifică uşor că ipotezele din teorema anterioară pot fi extinse dacă impunem condiţia $F(z) = I_\gamma(f)(z) \neq 0$, $z \in \dot{U}$, după cum urmează.

Teorema 3.2.2. *[64], [66] Fie numerele $\alpha < 1$ şi $\gamma > 0$. Fie funcţia $f \in \Sigma^*(\alpha)$ şi $F = I_\gamma(f)$, unde operatorul I_γ este definit prin relaţia (3.2) şi presupunem că $F(z) \neq 0$, $z \in \dot{U}$. Atunci $F \in \Sigma^*(\beta)$, unde $\beta = \beta(\alpha, \gamma)$ este dat de relaţia (3.3).*

3.3 Subclasa funcţiilor invers-convexe

În continuare vom prezenta o clasă specială de funcţii meromorfe, clasa funcţiilor invers-convexe, care a fost definită în [92] şi vom studia câteva proprietăţi legate de această clasă. Rezultatele prezentate în acest paragraf sunt originale şi au fost publicate în [92].

Definiţia 3.3.1. *[92] Fie funcţia $g(z) = \frac{1}{z} + \alpha_0 + \alpha_1 z + \cdots$, $0 < |z| < 1$, o funcţie meromorfă în U. Spunem că funcţia g este invers-stelată în $\dot{U}$ dacă există o funcţie $f \in S^*$ astfel încât $f(z)g(z) = 1$ pentru orice $z \in \dot{U}$. Vom nota cu S_i^* clasa acestor funcţii.*

Observaţia 3.3.1. Se observă imediat, din definiţia de mai sus, că dacă $g \in S_i^*$ atunci $g(z) \neq 0$, $z \in \dot{U}$ şi g este univalentă în $\dot{U}$.

Teorema 3.3.1. (teorema de caracterizare analitică a invers-stelarităţii funcţiilor meromorfe normate) *Fie $g(z) = \dfrac{1}{z} + \alpha_0 + \alpha_1 z + \cdots$, $0 < |z| < 1$, o funcţie meromorfă în U cu $g(z) \neq 0$, $z \in \dot{U}$. Atunci funcţia g este invers-stelată în $\dot{U}$ dacă şi numai dacă g este univalentă în $\dot{U}$ şi*

$$\mathrm{Re}\left[-\frac{zg'(z)}{g(z)}\right] > 0,\ z \in \dot{U}.$$

Observaţia 3.3.2.

1. Din teorema precedentă şi Teorema 3.1.1 avem că funcţia $g \in S_i^*$ dacă şi numai dacă g este stelată în $\dot{U}$.

2. Considerând funcţia lui Koebe, $K_\tau(z) = \dfrac{z}{(1+e^{i\tau}z)^2}$, $z \in U$, obţinem că funcţia $g_\tau(z) = \dfrac{1}{K_\tau(z)} = \dfrac{1}{z} + 2e^{i\tau} + e^{2i\tau}z \in S_i^*, \tau \in \mathbb{R}$, (deoarece $K_\tau \in S^*$), prin urmare g_τ este stelată în $\dot{U}$.

Definiţia 3.3.2. *[92] Fie $g : \dot{U} \to \mathbb{C}$ o funcţie meromorfă în U de forma*

$$g(z) = \frac{\alpha_{-1}}{z} + \alpha_0 + \alpha_1 z + \cdots,\ z \in \dot{U}.$$

Spunem că funcţia g este invers-convexă în $\dot{U}$ dacă există o funcţie convexă f definită pe U cu $f(0) = 0$ astfel încât $f(z)g(z) = 1$ pentru orice $z \in \dot{U}$.

Observaţia 3.3.3.

1. Se observă imediat, din definiţia de mai sus, că dacă g este invers-convexă, atunci $g(z) \neq 0$, $z \in \dot{U}$ şi g este univalentă în $\dot{U}$.

2. Dacă $\alpha_{-1} = 1$, atunci funcţia f din definiţia precedentă este şi ea normată, adică funcţia $g(z) = \dfrac{1}{z} + \alpha_0 + \alpha_1 z + \cdots$, $0 < |z| < 1$, este invers-convexă în $\dot{U}$ dacă există o funcţie $f \in K$ astfel încât $f(z)g(z) = 1$ pentru orice $z \in \dot{U}$. Vom nota cu K_i clasa funcţiilor meromorfe normate şi invers-convexe.

3. Dacă g este invers-convexă în $\dot{U}$ şi $\lambda \in \mathbb{C}^*$, atunci funcţia meromorfă λg este de asemenea invers-convexă în $\dot{U}$.

Teorema 3.3.2. *[92]* **(teorema de caracterizare analitică a invers-convexităţii funcţiilor meromorfe normate)** *Fie $g(z) = \dfrac{1}{z} + \alpha_0 + \alpha_1 z + \cdots$, $0 < |z| < 1$, o funcţie meromorfă în U cu $g(z) \neq 0$, $z \in \dot{U}$. Atunci funcţia g este invers-convexă în $\dot{U}$ dacă şi numai dacă g este univalentă în $\dot{U}$ şi*

$$\mathrm{Re}\left[\frac{zg''(z)}{g'(z)} - 2\frac{zg'(z)}{g(z)} + 1\right] > 0,\ z \in \dot{U}.$$

Vom nota cu Σ^* clasa funcţiilor meromorfe normate şi stelate în $\dot{U}$, adică

$$\Sigma^* = \left\{ g \in \Sigma : \mathrm{Re}\left[-\frac{zg'(z)}{g(z)} \right] > 0,\, z \in \dot{U} \right\},$$

iar cu Σ^c vom nota clasa funcţiilor meromorfe normate şi convexe în $\dot{U}$, adică

$$\Sigma^c = \left\{ g \in \Sigma_0 : \mathrm{Re}\left[-\left(\frac{zg''(z)}{g'(z)} + 1 \right) \right] > 0,\, z \in \dot{U} \right\}.$$

Observaţia 3.3.4. *[92] 1. Este uşor de observat că funcţia*

$$f(z) = \log(1+z),\, z \in U, \left(cu \quad \log(1+z)\Big|_{z=0} = 0 \right),$$

este convexă în U şi normată, prin urmare avem că funcţia $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$, $z \in \dot{U}$, aparţine clasei K_i. Dar

$$\frac{zg''(z)}{g'(z)} + 1 = \frac{\log(1+z) + 2z}{(1+z)\log(1+z)},$$

deci inegalitatea

$$\mathrm{Re}\left[-\left(\frac{zg''(z)}{g'(z)} + 1 \right) \right] > 0$$

nu este verificată pentru orice $z \in \dot{U}$ $\left(\text{de exemplu putem lua } z = \dfrac{1}{2}\right)$, deci $g \notin \Sigma^c$. Prin urmare, $K_i \neq \Sigma^c$.

2. Deoarece ştim că $f(z) = \dfrac{z}{1+e^{i\tau}z} \in K$, vom avea

$$g(z) = \frac{1}{f(z)} = \frac{1}{z} + e^{i\tau} \in K_i.$$

Pe de altă parte este uşor de verificat că $g \in \Sigma^c$, deci $K_i \cap \Sigma^c \neq \emptyset$.

3. Dacă $g \in K_i$, atunci $f = \dfrac{1}{g} \in K \subset S^*(1/2)$, deci $g \in \Sigma^*(1/2)$. Prin urmare $K_i \subset \Sigma^*(1/2)$.

Teorema 3.3.3. *[92]* **(teorema de dualitate între clasele Σ^* şi K_i)** *Fie $g : \dot{U} \to \mathbb{C}$ o funcţie din clasa Σ. Atunci $g \in K_i$ dacă şi numai dacă*

$$G(z) = -\frac{g^2(z)}{zg'(z)} \in \Sigma^*.$$

Teorema 3.3.4. *[92]* **(teorema de deformare pentru clasa K_i)** *Fie $g \in K_i$. Atunci avem:*

$$\frac{1}{r} - 1 \leq |g(z)| \leq \frac{1}{r} + 1,\, |z| = r \in (0,1) \quad \left(\text{adică} \left| |g(z)| - \frac{1}{|z|} \right| \leq 1,\, z \in \dot{U} \right),$$

$$\left(\frac{1-r}{r+r^2} \right)^2 \leq |g'(z)| \leq \left(\frac{1+r}{r-r^2} \right)^2,\, |z| = r \in (0,1).$$

Pentru $|g(z)|$ estimările sunt exacte şi avem egalitate pentru $g(z) = \dfrac{1}{z} + e^{i\tau}$, $\tau \in \mathbb{R}$.

3.4 Subclasa funcţiilor aproape invers-convexe

În acest paragraf vom prezenta o nouă clasă de funcţii meromorfe în $\dot{U}$, numită clasa funcţiilor aproape invers-convexe, care a fost definită în [92], şi vom enunţa şi demonstra două teoreme referitoare la această clasă, prima teoremă stabilind o legătură între noţiunile de invers-convexitate şi aproape invers-convexitate. Rezultatele prezentate în acest paragraf sunt originale şi au fost publicate în [92].

Definiţia 3.4.1. *[92] Fie $g : \dot{U} \to \mathbb{C}$ o funcţie meromorfă în U de forma*

$$g(z) = \frac{\alpha_{-1}}{z} + \alpha_0 + \alpha_1 z + \cdots + \alpha_n z^n + \cdots .$$

Spunem că funcţia g este aproape invers-convexă în $\dot{U}$ dacă există o funcţie invers-convexă ψ în $\dot{U}$ astfel încât

$$\operatorname{Re} \frac{g'(z)}{\psi'(z)} > 0,\ z \in \dot{U}.$$

Vom nota cu C_i clasa funcţiilor meromorfe aproape invers-convexe şi normate definite pe $\dot{U}$, adică

$$C_i = \left\{ g \in \Sigma : (\exists)\psi \in K_i \text{ astfel încât } \operatorname{Re} \frac{g'(z)}{\psi'(z)} > 0,\ z \in U \right\}.$$

Fie $\alpha < 1 < \beta$. Vom considera următoarele clase de funcţii meromorfe:

$$\Sigma^*(\alpha, \beta) = \left\{ g \in \Sigma : \alpha < \operatorname{Re} \left[-\frac{zg'(z)}{g(z)} \right] < \beta,\ z \in U \right\},$$

$$C_{i;\beta} = \left\{ g \in \Sigma : (\exists)\psi \in K_i \cap \Sigma^*(0, \beta) \text{ astfel încât } \operatorname{Re} \frac{g'(z)}{\psi'(z)} > 0,\ z \in U \right\}.$$

Teorema 3.4.1. *[92] Fie $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ cu $\operatorname{Re}\lambda > 2|\lambda|^2$, $\beta = \dfrac{\operatorname{Re}\lambda}{2|\lambda|^2}$ şi $g \in K_i$ cu $\operatorname{Re} \left[-\dfrac{zg'(z)}{g(z)} \right] < \beta$, $z \in U$ (i.e. $g \in K_i \cap \Sigma^*(0, \beta)$). Atunci funcţia*

$$h_\lambda(z) = g(z) + \lambda z g'(z),\ z \in \dot{U},$$

este aproape invers-convexă.

În teorema de mai sus avem nevoie de condiţia $\operatorname{Re}\lambda > 2|\lambda|^2$ deoarece trebuie să avem $\beta > 1$.

Este uşor de observat că $\operatorname{Re}\lambda > 2|\lambda|^2$ implică $|\lambda| < 1/2$, deci teorema precedentă nu se poate aplica pentru numerele complexe λ cu $|\lambda| \geq 1/2$.

Menţionăm că un rezultat similar cu acesta dar referitor la funcţii analitice în U a fost dat de B.N. Rahmanov în [74].

În continuare, pentru $\gamma \in \mathbb{C}$ cu $\operatorname{Re}\gamma > 0$ vom considera operatorul integral $I_\gamma : \Sigma \to \Sigma$ definit prin

$$I_\gamma(g)(z) = \frac{\gamma}{z^{\gamma+1}} \int_0^z t^\gamma g(t)dt. \tag{3.4}$$

Avem următoarea teoremă relativă la clasele K_i, C_i şi la operatorul I_γ.

Teorema 3.4.2. *[92] Fie $\gamma \in \mathbb{C}$ cu $\operatorname{Re}\gamma > 1$ şi $\beta = \dfrac{\operatorname{Re}\gamma + 1}{2}$.
Dacă $I_\gamma[K_i] \subset K_i$, atunci $I_\gamma[C_{i;\beta}] \subset C_i$.*

3.5 Proprietăţi de stelaritate pentru operatorul integral $J_{\beta,\gamma}$

Rezultatele cuprinse în acest paragraf sunt originale şi sunt publicate în [90]. Pentru $\Phi, \varphi \in H[1,1]$ cu $\Phi(z)\varphi(z) \neq 0$, $z \in U$, şi $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ cu $\beta \neq 0$, vom considera operatorul integral $J^{\Phi,\varphi}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} : H \subset \Sigma \to \Sigma$, definit astfel:

$$J^{\Phi,\varphi}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(g)(z) = \left[\frac{\gamma-\beta}{z^\gamma \Phi(z)} \int_0^z g^\alpha(t)\varphi(t)t^{\delta-1}dt\right]^{\frac{1}{\beta}}.$$

Primul rezultat al acestui paragraf prezintă câteva proprietăţi de bază pentru operatorul $J^{\Phi,\varphi}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}$ considerat mai sus.

Teorema 3.5.1. *[90] Fie $\Phi, \varphi \in H[1,1]$ cu $\Phi(z)\varphi(z) \neq 0$, $z \in U$ şi $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ cu $\beta \neq 0$, $\alpha + \gamma = \beta + \delta$ şi $\operatorname{Re}(\gamma - \beta) > 0$. Dacă $g \in \Sigma$ şi*

$$\alpha\frac{zg'(z)}{g(z)} + \frac{z\varphi'(z)}{\varphi(z)} + \delta \prec R_{\delta-\alpha,1}(z),$$

atunci

$$G(z) = J^{\Phi,\varphi}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(g)(z) = \left[\frac{\gamma-\beta}{z^\gamma \Phi(z)} \int_0^z g^\alpha(t)\varphi(t)t^{\delta-1}dt\right]^{\frac{1}{\beta}} \in \Sigma, \tag{3.5}$$

cu $zG(z) \neq 0$, $z \in U$, şi

$$\operatorname{Re}\left[\beta\frac{zG'(z)}{G(z)} + \frac{z\Phi'(z)}{\Phi(z)} + \gamma\right] > 0,\ z \in U.$$

Puterile din (3.5) sunt considerate în determinarea principală.

În continuare vom prezenta un caz particular pentru Teorema 3.5.1. Considerând $\Phi = \varphi \equiv 1$, $\alpha = \beta$, $\gamma = \delta$ şi folosind notaţia $J_{\beta,\gamma}$ în loc de $J^{1,1}_{\beta,\beta,\gamma,\gamma}$, din teorema precedentă avem :

Corolarul 3.5.1. *[90] Fie* $\beta, \gamma \in \mathbb{C}$ *cu* $\beta \neq 0$ *şi* $\mathrm{Re}\,(\gamma - \beta) > 0$. *Dacă* $g \in \Sigma$ *şi*

$$\beta \frac{zg'(z)}{g(z)} + \gamma \prec R_{\gamma-\beta,1}(z),$$

atunci

$$G(z) = J_{\beta,\gamma}(g)(z) = \left[\frac{\gamma - \beta}{z^\gamma} \int_0^z g^\beta(t) t^{\gamma-1} dt\right]^{\frac{1}{\beta}} \in \Sigma, \tag{3.6}$$

cu $zG(z) \neq 0$, $z \in U$, *şi*

$$\mathrm{Re}\left[\beta \frac{zG'(z)}{G(z)} + \gamma\right] > 0,\ z \in U.$$

(Puterile din (3.6) sunt considerate în determinarea principală).

Observaţia 3.5.1. 1. Dacă definim clasele $K_{\beta,\gamma}$ ca fiind

$$K_{\beta,\gamma} = \left\{g \in \Sigma : \gamma + \beta \frac{zg'(z)}{g(z)} \prec R_{\gamma-\beta,1}(z)\right\},$$

avem din Corolarul 3.5.1 că $J_{\beta,\gamma} : K_{\beta,\gamma} \to \Sigma$ cu $zJ_{\beta,\gamma}(g)(z) \neq 0$, $z \in U$, şi

$$\mathrm{Re}\left[\gamma + \beta \frac{zJ'_{\beta,\gamma}(g)(z)}{J_{\beta,\gamma}(g)(z)}\right] > 0,\ z \in U.$$

2. Fie

$$\tilde{K}_{\beta,\gamma} = \left\{g \in \Sigma : \mathrm{Re}\left[\gamma + \beta \frac{zg'(z)}{g(z)}\right] > 0,\ z \in U\right\}.$$

Folosind corolarul precedent avem $J_{\beta,\gamma}(K_{\beta,\gamma}) \subset \tilde{K}_{\beta,\gamma}$, deci $J_{\beta,\gamma}(\tilde{K}_{\beta,\gamma}) \subset \tilde{K}_{\beta,\gamma}$, unde β, $\gamma \in \mathbb{C}$ cu $\beta \neq 0$ şi $\mathrm{Re}\,(\gamma - \beta) > 0$.

3. Fie $\beta < 0$, $\gamma \in \mathbb{C}$ cu $\mathrm{Re}\,\gamma > \beta$ şi $\dfrac{\mathrm{Re}\,\gamma}{\beta} \leq \alpha < 1$. Atunci, din $J_{\beta,\gamma}(\tilde{K}_{\beta,\gamma}) \subset \tilde{K}_{\beta,\gamma}$, deducem $J_{\beta,\gamma}(\Sigma^*(\alpha)) \subset \Sigma^*\left(\dfrac{\mathrm{Re}\,\gamma}{\beta}\right)$.

Dacă

$$G(z) = \left[\frac{\gamma - \beta}{z^\gamma} \int_0^z t^{\gamma-1} g^\beta(t) dt\right]^{\frac{1}{\beta}},\ z \in \dot{U},$$

şi presupunem că $p(z) = -\dfrac{zG'(z)}{G(z)}$ este analitică în U, avem

$$p(z) + \frac{zp'(z)}{\gamma - \beta p(z)} = -\frac{zg'(z)}{g(z)},\ z \in U. \tag{3.7}$$

În continuare vom determina condiţii asupra numerelor complexe $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ astfel încât să avem

$$J_{\beta,\gamma}(g) \in \Sigma^*(\alpha, \delta)$$

atunci când $g \in \Sigma^*(\alpha, \delta)$.

Reamintim că operatorul integral $J_{\beta,\gamma}$ este definit prin relaţia (3.6) iar prin clasa $\Sigma^*(\alpha, \delta)$ înţelegem:

$$\Sigma^*(\alpha, \delta) = \left\{ g \in \Sigma : \alpha < \operatorname{Re}\left[-\frac{zg'(z)}{g(z)} \right] < \delta,\ z \in U \right\}.$$

Menţionăm că rezultate similare celor care urmează, aplicate însă pentru operatorul $J_{1,\gamma}$, pot fi găsite şi în [1].

Teorema 3.5.2. *[90] Fie $\beta > 0$, $\gamma \in \mathbb{C}$ şi $0 \le \alpha < 1 < \delta \le \dfrac{\operatorname{Re}\gamma}{\beta}$.*
Dacă $g \in \Sigma^*(\alpha, \delta)$, atunci $G = J_{\beta,\gamma}(g) \in \Sigma^*(\alpha, \delta)$.

Considerând $\beta = 1$ în teorema precedentă, obţinem:

Corolarul 3.5.2. *[90] Fie $\gamma \in \mathbb{C}$ şi $0 \le \alpha < 1 < \delta \le \operatorname{Re}\gamma$. Dacă $g \in \Sigma^*(\alpha, \delta)$ şi*

$$G(z) = J_{1,\gamma}(g)(z) = \frac{\gamma - 1}{z^\gamma} \int_0^z t^{\gamma-1} g(t)dt,$$

atunci $G \in \Sigma^*(\alpha, \delta)$.

Teorema 3.5.3. *[90] Fie $\beta < 0$, $\gamma \in \mathbb{C}$ şi $\dfrac{\operatorname{Re}\gamma}{\beta} \le \alpha < 1 < \delta$.*
Dacă $g \in \Sigma^*(\alpha, \delta)$, atunci $G = J_{\beta,\gamma}(g) \in \Sigma^*(\alpha, \delta)$.

Observaţia 3.5.2. Dacă se consideră că $\delta \to \infty$ în teorema precedentă, obţinem că pentru $\beta < 0$, $\gamma \in \mathbb{C}$ cu $\operatorname{Re}\gamma > \beta$ şi $\dfrac{\operatorname{Re}\gamma}{\beta} \le \alpha < 1$, avem

$$g \in \Sigma^*(\alpha) \Rightarrow G = J_{\beta,\gamma}(g) \in \Sigma^*(\alpha).$$

Definiţia 3.5.1. *Fie $\beta < 0$ şi $\gamma \in \mathbb{C}$ cu $\operatorname{Re}\gamma > \beta$. Pentru un număr dat $\alpha \in \left[\dfrac{\operatorname{Re}\gamma}{\beta}, 1\right)$, vom defini ordinul de stelaritate al clasei $J_{\beta,\gamma}(\Sigma^*(\alpha))$ ca fiind cel mai mare număr $\mu = \mu(\alpha; \beta, \gamma)$ care satisface $J_{\beta,\gamma}(\Sigma^*(\alpha)) \subset \Sigma^*(\mu)$.*

Teorema 3.5.4. *[90]* **(ordinul de stelaritate al clasei $J_{\beta,\gamma}(\Sigma^*(\alpha))$)**

Fie $\beta < 0$, $\gamma - \beta > 0$ şi $J_{\beta,\gamma}$ operatorul integral definit în (3.6). Dacă $\alpha \in [\alpha_0, 1)$, unde $\alpha_0 = \max\left\{\dfrac{\beta + \gamma + 1}{2\beta}, \dfrac{\gamma}{\beta}\right\}$, atunci ordinul de stelaritate al clasei $J_{\beta,\gamma}(\Sigma^*(\alpha))$ este

$$\mu(\alpha; \beta, \gamma) = -\frac{1}{\beta}\left[\frac{\gamma - \beta}{{}_2F_1(1, 2\beta(\alpha - 1), \gamma + 1 - \beta; \frac{1}{2})} - \gamma\right],$$

unde ${}_2F_1$ reprezintă funcţia hipergeometrică.

În continuare vom determina condiţii pentru α, β, γ şi $\delta = \delta(\alpha, \beta, \gamma)$ astfel încât

$$J_{\beta,\gamma}\left(\Sigma^*(\alpha) \cap K_{\beta,\gamma}\right) \subset \Sigma^*(\delta).$$

Teorema 3.5.5. *[90] Fie $0 \leq \alpha < 1$ şi $0 < \beta < \gamma$. Vom nota*

$$\begin{aligned}
\beta_1(\alpha,\gamma) = & \quad \frac{2\sqrt{2\gamma(\alpha-1)^2+\alpha}-\alpha-1}{2(\alpha-1)^2}, \\
\delta_1(\alpha,\beta,\gamma) = & \quad \frac{2\alpha\beta+2\gamma+1-\sqrt{(1+2\alpha\beta-2\gamma)^2+8(\gamma-\beta)}}{4\beta}, \\
\delta_2(\alpha,\beta,\gamma) = & \quad \frac{2\alpha\beta+2\beta+1-\sqrt{(1+2\alpha\beta-2\beta)^2+8(\beta-\gamma)}}{4\beta}.
\end{aligned}$$

Dacă $\gamma > \frac{1}{8}$ şi $\beta < \beta_1(\alpha,\gamma)$, atunci $J_{\beta,\gamma}\left(\Sigma^*(\alpha) \cap K_{\beta,\gamma}\right) \subset \Sigma^*(\delta_1(\alpha,\beta,\gamma))$.
Dacă $\gamma \leq \frac{1}{8}$ sau $\begin{cases} \gamma > \frac{1}{8} \\ \beta \geq \beta_1(\alpha,\gamma) \end{cases}$, atunci $J_{\beta,\gamma}\left(\Sigma^*(\alpha) \cap K_{\beta,\gamma}\right) \subset \Sigma^*(\delta(\alpha,\beta,\gamma))$, unde

$$\delta(\alpha,\beta,\gamma) = \min\{\delta_1(\alpha,\beta,\gamma), \delta_2(\alpha,\beta,\gamma)\}.$$

Operatorul $J_{\beta,\gamma}$ este definit prin (3.6).

Se observă că dacă se consideră în teorema precedentă $zJ_{\alpha,\beta}(g)(z) \neq 0$, $z \in U$, avem:

Teorema 3.5.6. *[90] Fie $0 \leq \alpha < 1$, $0 < \beta < \gamma$, $g \in \Sigma^*(\alpha)$ şi $G(z) = J_{\alpha,\beta}(g)(z)$. Presupunem că $zG(z) \neq 0$, $z \in U$, şi considerăm:*

$$\begin{aligned}
\beta_1(\alpha,\gamma) = & \quad \frac{2\sqrt{2\gamma(\alpha-1)^2+\alpha}-\alpha-1}{2(\alpha-1)^2}, \\
\delta_1(\alpha,\beta,\gamma) = & \quad \frac{2\alpha\beta+2\gamma+1-\sqrt{(1+2\alpha\beta-2\gamma)^2+8(\gamma-\beta)}}{4\beta}, \\
\delta_2(\alpha,\beta,\gamma) = & \quad \frac{2\alpha\beta+2\beta+1-\sqrt{(1+2\alpha\beta-2\beta)^2+8(\beta-\gamma)}}{4\beta}.
\end{aligned}$$

Dacă $\gamma > \frac{1}{8}$ şi $\beta < \beta_1(\alpha,\gamma)$, atunci $G \in \Sigma^*(\delta_1(\alpha,\beta,\gamma))$.
Dacă $\gamma \leq \frac{1}{8}$ sau $\begin{cases} \gamma > \frac{1}{8} \\ \beta \geq \beta_1(\alpha,\gamma) \end{cases}$, atunci $G \in \Sigma^*(\delta(\alpha,\beta,\gamma))$, unde

$$\delta(\alpha,\beta,\gamma) = \min\{\delta_1(\alpha,\beta,\gamma), \delta_2(\alpha,\beta,\gamma)\}.$$

Rezultate similare ultimelor două teoreme pot fi găsite şi în [66] şi [79].

Capitolul 4

Operatori integrali pe clasa Σ_p a funcţiilor meromorfe multivalente

Acest capitol este dedicat studiului funcţiilor meromorfe multivalente şi conţine în întregime rezultate originale care sunt publicate în [91] şi în [93].

În paragraful 4.1 este definit un operator integral, notat cu $J^{\Phi,\varphi}_{p,\alpha,\beta,\gamma,\delta}$, şi este prezentată o teoremă de existenţă referitoare la acest operator iar în paragrafele 4.2 şi 4.3 sunt studiate proprietăţile de conservare ale unor noi subclase, în urma aplicării operatorilor particulari $J_{p,\beta,\gamma}$ şi $J_{p,\gamma}$.

În paragraful 4.4 se consideră o transformare multiplicativă, notată $J^n_{p,\lambda}$, şi se defineşte o subclasă de funcţii meromorfe (multivalente) folosind această transformare şi condiţia de la stelaritate, după care sunt studiate proprietăţile de conservare ale acestei subclase în urma aplicării operatorului integral $J_{p,\gamma}$.

4.1 Operatorul $J^{\Phi,\varphi}_{p,\alpha,\beta,\gamma,\delta}$

Rezultatele cuprinse în acest paragraf sunt originale şi sunt publicate în [91].

Pentru $p \in \mathbb{N}^*$ vom nota cu Σ_p clasa funcţiilor meromorfe în U de forma

$$g(z) = \frac{a_{-p}}{z^p} + a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots,\ z \in \dot{U},\ a_{-p} \neq 0.$$

Fie $p \in \mathbb{N}^*$, $\Phi, \varphi \in H[1, p]$ cu $\Phi(z)\varphi(z) \neq 0$, $z \in U$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ cu $\beta \neq 0$ şi $g \in \Sigma_p$. Considerăm operatorul integral

$$J^{\Phi,\varphi}_{p,\alpha,\beta,\gamma,\delta}(g)(z) = \left[\frac{\gamma - p\beta}{z^\gamma \Phi(z)} \int_0^z g^\alpha(t)\varphi(t)t^{\delta-1}dt\right]^{\frac{1}{\beta}},$$

unde puterile sunt considerate în determinarea principală.

Prima teoremă a acestui paragraf prezintă câteva proprietăţi de bază ale operatorului considerat mai sus.

Teorema 4.1.1. *[91] Fie $p \in \mathbb{N}^*$, $\Phi, \varphi \in H[1, p]$ cu $\Phi(z)\varphi(z) \neq 0$, $z \in U$ şi $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ cu $\beta \neq 0$, $\delta + p\beta = \gamma + p\alpha$, $\operatorname{Re}(\gamma - p\beta) > 0$. Presupunem că $g \in \Sigma_p$*

verifică subordonarea

$$\alpha\frac{zg'(z)}{g(z)}+\frac{z\varphi'(z)}{\varphi(z)}+\delta\prec R_{\delta-p\alpha,p}(z).$$

Dacă funcţia $G=J^{\Phi,\varphi}_{p,\alpha,\beta,\gamma,\delta}(g)$ *este definită prin*

$$G(z)=J^{\Phi,\varphi}_{p,\alpha,\beta,\gamma,\delta}(g)(z)=\left[\frac{\gamma-p\beta}{z^{\gamma}\Phi(z)}\int_0^z g^{\alpha}(t)\varphi(t)t^{\delta-1}dt\right]^{\frac{1}{\beta}},\ z\in\dot{U},\tag{4.1}$$

atunci $G\in\Sigma_p$ *cu* $z^pG(z)\neq 0$, $z\in U$, *şi*

$$\operatorname{Re}\left[\beta\frac{zG'(z)}{G(z)}+\frac{z\Phi'(z)}{\Phi(z)}+\gamma\right]>0,\ z\in U.$$

Puterile din (4.1) sunt considerate în determinarea principală.

Considerând în teorema precedentă $\alpha=\beta$, $\gamma=\delta$ şi folosind notaţia $J^{\Phi,\varphi}_{p,\beta,\gamma}$ în loc de $J^{\Phi,\varphi}_{p,\beta,\beta,\gamma,\gamma}$, obţinem următorul corolar:

Corolarul 4.1.1. *[91] Fie* $p\in\mathbb{N}^*$, $\Phi,\varphi\in H[1,p]$ *cu* $\Phi(z)\varphi(z)\neq 0$, $z\in U$, *şi* $\beta,\gamma\in\mathbb{C}$ *cu* $\beta\neq 0$ *şi* $\operatorname{Re}(\gamma-p\beta)>0$. *Dacă* $g\in\Sigma_p$ *şi*

$$\beta\frac{zg'(z)}{g(z)}+\frac{z\varphi'(z)}{\varphi(z)}+\gamma\prec R_{\gamma-p\beta,p}(z),$$

atunci

$$G(z)=J^{\Phi,\varphi}_{p,\beta,\gamma}(g)(z)=\left[\frac{\gamma-p\beta}{z^{\gamma}\Phi(z)}\int_0^z g^{\beta}(t)\varphi(t)t^{\gamma-1}dt\right]^{\frac{1}{\beta}}\in\Sigma_p,$$

cu $z^pG(z)\neq 0$, $z\in U$, *şi*

$$\operatorname{Re}\left[\beta\frac{zG'(z)}{G(z)}+\frac{z\Phi'(z)}{\Phi(z)}+\gamma\right]>0,\ z\in U.$$

Considerând $\Phi=\varphi\equiv 1$ în Corolarul 4.1.1 şi folosind notaţia $J_{p,\beta,\gamma}$ în loc de $J^{1,1}_{p,\beta,\gamma}$, obţinem:

Corolarul 4.1.2. *[91] Fie* $p\in\mathbb{N}^*$ *şi* $\beta,\gamma\in\mathbb{C}$ *cu* $\beta\neq 0$ *şi* $\operatorname{Re}(\gamma-p\beta)>0$. *Dacă* $g\in\Sigma_p$ *şi*

$$\beta\frac{zg'(z)}{g(z)}+\gamma\prec R_{\gamma-p\beta,p}(z),$$

atunci

$$G(z)=J_{p,\beta,\gamma}(g)(z)=\left[\frac{\gamma-p\beta}{z^{\gamma}}\int_0^z g^{\beta}(t)t^{\gamma-1}dt\right]^{\frac{1}{\beta}}\in\Sigma_p,$$

cu $z^pG(z)\neq 0$, $z\in U$, *şi*

$$\operatorname{Re}\left[\beta\frac{zG'(z)}{G(z)}+\gamma\right]>0,\ z\in U.$$

Fie $p \in \mathbb{N}^*$, $\beta, \gamma \in \mathbb{C}$ cu $\beta \neq 0$, $g \in \Sigma_p$, $G = J_{p,\beta,\gamma}(g)$ şi $P(z) = -\dfrac{zG'(z)}{G(z)}$, $z \in U$. Dacă $P \in H(U)$, atunci din

$$G(z) = \left[\frac{\gamma - p\beta}{z^\gamma} \int_0^z t^{\gamma-1} g^\beta(t) dt\right]^{\frac{1}{\beta}}, \; z \in \dot{U},$$

obţinem că

$$P(z) + \frac{zP'(z)}{\gamma - \beta P(z)} = -\frac{zg'(z)}{g(z)}, \; z \in U. \tag{4.2}$$

Considerând în corolarul precedent $\beta = 1$ şi folosind notaţia $J_{p,\gamma}$ în loc de $J_{p,1,\gamma}$, avem:

Corolarul 4.1.3. *Fie $p \in \mathbb{N}^*$ şi $\gamma \in \mathbb{C}$ cu $\operatorname{Re}\gamma > p$. Fie $g \in \Sigma_p$ care satisface condiţia:*

$$\frac{zg'(z)}{g(z)} + \gamma \prec R_{\gamma-p,p}(z).$$

Atunci

$$G(z) = J_{p,\gamma}(g)(z) = \frac{\gamma - p}{z^\gamma} \int_0^z g(t) t^{\gamma-1} dt \in \Sigma_p,$$

cu $z^p G(z) \neq 0$, $z \in U$, şi $\operatorname{Re}\left[\gamma + \dfrac{zG'(z)}{G(z)}\right] > 0$, $z \in U$.

Teorema 4.1.2. *[91] Fie $p \in \mathbb{N}^*$ şi $\lambda \in \mathbb{C}$ cu $\operatorname{Re}\lambda > p$. Dacă $g \in \Sigma_p$, atunci $J_{p,\lambda}(g) \in \Sigma_p$, unde $J_{p,\lambda}(g)(z) = \dfrac{\lambda - p}{z^\lambda} \displaystyle\int_0^z g(t) t^{\lambda-1} dt$.*

Observaţia 4.1.1. Fie $p \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in \mathbb{C}$ cu $\operatorname{Re}\lambda > p$ şi $\Sigma_{p,0} = \{g \in \Sigma_p : a_{-p} = 1\}$. Este uşor de observat că din teorema precedentă avem $J_{p,\lambda}(g) \in \Sigma_{p,0}$ atunci când $g \in \Sigma_{p,0}$.

4.2 Operatorul $J_{p,\beta,\gamma}$ aplicat clasei $\Sigma_p^*(\alpha, \delta)$

Rezultatele cuprinse în acest paragraf sunt originale şi sunt publicate în [91]. Fie $p \in \mathbb{N}^*$ şi $\alpha, \delta \in \mathbb{R}$ cu $\alpha < p < \delta$. Se consideră clasele:

$$\Sigma_p^*(\alpha) = \left\{g \in \Sigma_p : \operatorname{Re}\left[-\frac{zg'(z)}{g(z)}\right] > \alpha, \; z \in U\right\},$$

$$\Sigma_p^*(\alpha, \delta) = \left\{g \in \Sigma_p : \alpha < \operatorname{Re}\left[-\frac{zg'(z)}{g(z)}\right] < \delta, \; z \in U\right\}.$$

Se observă că $\Sigma_1^*(\alpha)$ este clasa funcţiilor meromorfe în $\dot{U}$, stelate de ordinul α, şi este binecunoscut faptul că pentru $0 \leq \alpha < 1$ aceste funcţii sunt univalente.

În continuare vom enunţa şi demonstra două leme care vor fi utilizate la demonstrarea unor rezultate din cadrul acestui capitol.

Lema 4.2.1. *[91] Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ şi $\gamma \in \mathbb{C}$ cu $\operatorname{Re}\gamma > \alpha\beta$. Dacă $P \in H[P(0), n]$ cu $P(0) \in \mathbb{R}$ şi $P(0) > \alpha$, atunci avem implicaţia*

$$\operatorname{Re}\left[P(z) + \frac{zP'(z)}{\gamma - \beta P(z)}\right] > \alpha \Rightarrow \operatorname{Re} P(z) > \alpha,\ z \in U.$$

Lema 4.2.2. *[91] Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $\beta, \delta \in \mathbb{R}$ şi $\gamma \in \mathbb{C}$ cu $\operatorname{Re}\gamma > \delta\beta$. Dacă $P \in H[P(0), n]$ cu $P(0) \in \mathbb{R}$ şi $P(0) < \delta$, atunci avem implicaţia*

$$\operatorname{Re}\left[P(z) + \frac{zP'(z)}{\gamma - \beta P(z)}\right] < \delta \Rightarrow \operatorname{Re} P(z) < \delta,\ z \in U.$$

În continuare vom determina condiţii asupra numerelor $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ astfel încât să avem $J_{p,\beta,\gamma}(g) \in \Sigma_p^*(\alpha, \delta)$ atunci când $g \in \Sigma_p^*(\alpha, \delta)$, unde $J_{p,\beta,\gamma}$ este operatorul integral dat de relaţia

$$J_{p,\beta,\gamma}(g)(z) = \left[\frac{\gamma - p\beta}{z^\gamma} \int_0^z g^\beta(t) t^{\gamma-1} dt\right]^{\frac{1}{\beta}}. \tag{4.3}$$

Teorema 4.2.1. *[91] Fie $p \in \mathbb{N}^*$, $\beta > 0, \gamma \in \mathbb{C}$ şi $\alpha < p < \delta < \dfrac{\operatorname{Re}\gamma}{\beta}$.
Dacă $g \in \Sigma_p^*(\alpha, \delta)$, atunci $G = J_{p,\beta,\gamma}(g) \in \Sigma_p^*(\alpha, \delta)$.*

Considerând $\beta = 1$ în teorema precedentă şi folosind notaţia $J_{p,\gamma}$ în loc de $J_{p,1,\gamma}$, obţinem:

Corolarul 4.2.1. *[91] Fie $p \in \mathbb{N}^*$, $\gamma \in \mathbb{C}$ şi $\alpha < p < \delta < \operatorname{Re}\gamma$. Dacă $g \in \Sigma_p^*(\alpha, \delta)$, atunci*

$$G = J_{p,\gamma}(g) \in \Sigma_p^*(\alpha, \delta),$$

unde $J_{p,\gamma}(g)(z) = \dfrac{\gamma - p}{z^\gamma} \displaystyle\int_0^z t^{\gamma-1} g(t) dt$, $z \in \dot{U}$.

Teorema 4.2.2. *[91] Fie $p \in \mathbb{N}^*$, $\beta > 0, \gamma \in \mathbb{C}$ şi $\alpha < p < \dfrac{\operatorname{Re}\gamma}{\beta} \leq \delta$.
Dacă $g \in \Sigma_p^*(\alpha, \delta)$ cu*

$$\beta \frac{zg'(z)}{g(z)} + \gamma \prec R_{\gamma - p\beta, p}(z),$$

atunci $G = J_{p,\beta,\gamma}(g) \in \Sigma_p^*(\alpha, \delta)$.

Considerând, în teorema precedentă, că $\delta \to \infty$ vom obţine următorul corolar:

Corolarul 4.2.2. *[91] Fie $p \in \mathbb{N}^*$, $\beta > 0, \gamma \in \mathbb{C}$ şi $\alpha < p < \dfrac{\operatorname{Re}\gamma}{\beta}$.
Dacă $g \in \Sigma_p^*(\alpha)$ cu*

$$\beta \frac{zg'(z)}{g(z)} + \gamma \prec R_{\gamma - p\beta, p}(z),$$

atunci $G = J_{p,\beta,\gamma}(g) \in \Sigma_p^*(\alpha)$.

Facem observaţia că putem avea un rezultat asemănător cu cel din Corolarul 4.2.2 dar în care să renunţăm la condiţia $\beta\dfrac{zg'(z)}{g(z)}+\gamma \prec R_{\gamma-p\beta,p}(z)$, după cum urmează:

Teorema 4.2.3. *[91] Fie $p\in\mathbb{N}^*$, $\beta>0,\gamma\in\mathbb{C}$, $\alpha<p<\dfrac{\operatorname{Re}\gamma}{\beta}$, $g\in\Sigma_p^*(\alpha)$ şi $G=J_{p,\beta,\gamma}(g)$. Dacă $G\in\Sigma_p$ cu $z^pG(z)\neq 0$, $z\in U$, atunci $G\in\Sigma_p^*(\alpha)$.*

Ştiind din Teorema 4.1.2 că pentru $p\in\mathbb{N}^*$ şi $\gamma\in\mathbb{C}$ cu $\operatorname{Re}\gamma>p$ avem $J_{p,\gamma}(g)\in\Sigma_p$, când $g\in\Sigma_p$, obţinem din teorema precedentă, considerând $\beta=1$, următorul corolar:

Corolarul 4.2.3. *[91] Fie $p\in\mathbb{N}^*$, $\gamma\in\mathbb{C}$ şi $\alpha<p<\operatorname{Re}\gamma$.*
Dacă $g\in\Sigma_p^*(\alpha)$ cu $z^pJ_{p,\gamma}(g)(z)\neq 0$, $z\in U$, atunci $G=J_{p,\gamma}(g)\in\Sigma_p^*(\alpha)$.

Luând $\beta=1$ în Teorema 4.2.2 obţinem:

Corolarul 4.2.4. *[91] Fie $p\in\mathbb{N}^*$, $\gamma\in\mathbb{C}$ şi $\alpha<p<\operatorname{Re}\gamma\leq\delta$.*
Dacă $g\in\Sigma_p^*(\alpha,\delta)$, cu

$$\frac{zg'(z)}{g(z)}+\gamma\prec R_{\gamma-p,p}(z),\ z\in U,$$

atunci $G=J_{p,\gamma}(g)\in\Sigma_p^*(\alpha,\delta)$.

Teorema 4.2.4. *[91] Fie $p\in\mathbb{N}^*$, $\beta<0$, $\gamma\in\mathbb{C}$ şi $\dfrac{\operatorname{Re}\gamma}{\beta}<\alpha<p<\delta$.*
Dacă $g\in\Sigma_p^*(\alpha,\delta)$, atunci $G=J_{p,\beta,\gamma}(g)\in\Sigma_p^*(\alpha,\delta)$.

Dacă luăm $\delta\to\infty$, în teorema de mai sus, obţinem următorul corolar:

Corolarul 4.2.5. *[91] Fie $p\in\mathbb{N}^*$, $\beta<0$, $\gamma\in\mathbb{C}$ şi $\dfrac{\operatorname{Re}\gamma}{\beta}<\alpha<p$. Atunci*

$$g\in\Sigma_p^*(\alpha)\Rightarrow G=J_{p,\beta,\gamma}(g)\in\Sigma_p^*(\alpha).$$

Teorema 4.2.5. *[91] Fie $p\in\mathbb{N}^*$, $\beta<0,\gamma\in\mathbb{C}$ şi $\alpha\leq\dfrac{\operatorname{Re}\gamma}{\beta}<p<\delta$.*
Dacă $g\in\Sigma_p^*(\alpha,\delta)$, cu

$$\beta\frac{zg'(z)}{g(z)}+\gamma\prec R_{\gamma-p\beta,p}(z),$$

atunci $G=J_{p,\beta,\gamma}(g)\in\Sigma_p^*(\alpha,\delta)$.

Dacă vom considera că $\delta\to\infty$, în teorema precedentă, obţinem următorul corolar:

Corolarul 4.2.6. *[91] Fie $p\in\mathbb{N}^*$, $\beta<0,\gamma\in\mathbb{C}$ şi $\alpha\leq\dfrac{\operatorname{Re}\gamma}{\beta}<p$.*
Dacă $g\in\Sigma_p^*(\alpha)$, cu

$$\beta\frac{zg'(z)}{g(z)}+\gamma\prec R_{\gamma-p\beta,p}(z),$$

atunci $G=J_{p,\beta,\gamma}(g)\in\Sigma_p^*(\alpha)$.

Putem obţine un rezultat similar celui de mai sus, în care să renunţăm la condiţia $\beta\dfrac{zg'(z)}{g(z)}+\gamma\prec R_{\gamma-p\beta,p}(z)$, după cum urmează:

Teorema 4.2.6. *[91] Fie $p\in\mathbb{N}^*$, $\beta<0,\gamma\in\mathbb{C}$, $\alpha\leq\dfrac{\operatorname{Re}\gamma}{\beta}<p$ şi $g\in\Sigma_p^*(\alpha)$. Fie $G=J_{p,\beta,\gamma}(g)$. Dacă $G\in\Sigma_p$ şi $z^pG(z)\neq 0$, $z\in U$, atunci $G\in\Sigma_p^*(\alpha)$.*

4.3 Operatorul $J_{p,\gamma}$ aplicat clasei $\Sigma K_p(\alpha,\delta)$ şi clasei $\Sigma\mathcal{C}_{p,0}(\alpha,\delta;\varphi)$

Rezultatele cuprinse în acest paragraf sunt originale şi sunt publicate în [91].
Fie $p\in\mathbb{N}^*$ şi $\alpha,\delta\in\mathbb{R}$. Se consideră următoarele clase de funcţii meromorfe:
$\Sigma K_p(\alpha)=\left\{g\in\Sigma_p:\operatorname{Re}\left[1+\dfrac{zg''(z)}{g'(z)}\right]<-\alpha,\ z\in U\right\}$, $\alpha<p$,
$\Sigma K_{p,0}(\alpha)=\Sigma K_p(\alpha)\cap\Sigma_{p,0}$,
$\Sigma K_p(\alpha,\delta)=\left\{g\in\Sigma_p:\alpha<\operatorname{Re}\left[-1-\dfrac{zg''(z)}{g'(z)}\right]<\delta,\ z\in U\right\}$, $\alpha<p<\delta$,
$\Sigma K_{p,0}(\alpha,\delta)=\Sigma K_p(\alpha,\delta)\cap\Sigma_{p,0}$,
$\Sigma\mathcal{C}_{p,0}(\alpha,\delta;\varphi)=\left\{g\in\Sigma_{p,0}:\alpha<\operatorname{Re}\left[\dfrac{g'(z)}{\varphi'(z)}\right]<\delta,\ z\in U\right\}$, unde $\alpha<1\leq p<\delta$ şi $\varphi\in\Sigma K_{p,0}(\alpha,\delta)$.

Se observă că $\Sigma K_1(\alpha)\cap\Sigma_0$ este clasa funcţiilor meromorfe (în $\dot{U}$) normate şi convexe de ordin α.

Dacă $\varphi\in\Sigma K_1(0)\cap\Sigma_0$, atunci o funcţie din clasa $\Sigma\mathcal{C}_{1,0}(0,\delta;\varphi)$ este funcţie meromorfă aproape convexă în raport cu funcţia convexă φ.

Fie $\gamma\in\mathbb{C}$ cu $\operatorname{Re}\gamma>p$. Considerăm operatorul integral $J_{p,\gamma}$ definit pe clasa Σ_p astfel

$$J_{p,\gamma}(g)(z)=\frac{\gamma-p}{z^\gamma}\int_0^z t^{\gamma-1}g(t)dt,\ g\in\Sigma_p.$$

Este uşor de observat că dacă $g\in\Sigma_p$ este de forma

$$g(z)=\frac{a_{-p}}{z^p}+\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k,\ z\in\dot{U},$$

atunci

$$J_{p,\gamma}(g)(z)=\frac{a_{-p}}{z^p}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\gamma-p}{\gamma+k}a_kz^k,\ z\in\dot{U}.$$

În plus, $J_{p,\gamma}(zg'(z))=z\left[J_{p,\gamma}(g)(z)\right]'$, $z\in\dot{U}$.

Teorema 4.3.1. *[91] Fie $p\in\mathbb{N}^*$, $\gamma\in\mathbb{C}$ cu $\operatorname{Re}\gamma>p$ şi $\alpha<p<\delta<\operatorname{Re}\gamma$. Dacă $g\in\Sigma K_p(\alpha,\delta)$ şi $z^{p+1}J'_{p,\gamma}(g)(z)\neq 0$, $z\in U$, atunci*

$$J_{p,\gamma}(g)\in\Sigma K_p(\alpha,\delta).$$

Se observă din demonstraţia teoremei anterioare că avem şi următorul rezultat:

Teorema 4.3.2. *[91] Fie $p \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$ şi $\gamma \in \mathbb{C}$ cu $\alpha < p < \operatorname{Re}\gamma$. Dacă $g \in \Sigma K_p(\alpha)$ şi $z^{p+1}J'_{p,\gamma}(g)(z) \neq 0$, $z \in U$, atunci*

$$J_{p,\gamma}(g) \in \Sigma K_p(\alpha).$$

Teorema 4.3.3. *[91] Fie $p \in \mathbb{N}^*$, $\gamma \in \mathbb{C}$ cu $\operatorname{Re}\gamma > p$ şi $\alpha < 1 \leq p < \delta < \operatorname{Re}\gamma$. Fie $\varphi \in \Sigma K_{p,0}(\alpha, \delta)$ şi $g \in \Sigma \mathcal{C}_{p,0}(\alpha, \delta; \varphi)$ astfel încât $z^{p+1}J'_{p,\gamma}(\varphi)(z) \neq 0$, $z \in U$, atunci*

$$J_{p,\gamma}(g) \in \Sigma \mathcal{C}_{p,0}(\alpha, \delta; \Phi),$$

unde $\Phi = J_{p,\gamma}(\varphi)$.

Menţionăm că în capitolul următor apar două rezultate care generalizează Teorema 4.3.1, respectiv Teorema 4.3.3, însă teoremele din capitolul următor nu utilizează condiţia $z^{p+1}J'_{p,\gamma}(g)(z) \neq 0$, $z \in U$, respectiv $z^{p+1}J'_{p,\gamma}(\varphi)(z) \neq 0$, $z \in U$, prin urmare Teorema 4.3.1 şi Teorema 4.3.3 pot fi îmbunătăţite astfel:

Teorema 4.3.4. *Fie $p \in \mathbb{N}^*$, $\gamma \in \mathbb{C}$ cu $\operatorname{Re}\gamma > p$ şi $\alpha < p < \delta < \operatorname{Re}\gamma$.
Dacă $g \in \Sigma K_p(\alpha, \delta)$, atunci*

$$J_{p,\gamma}(g) \in \Sigma K_p(\alpha, \delta).$$

Teorema 4.3.5. *Fie $p \in \mathbb{N}^*$, $\gamma \in \mathbb{C}$ cu $\operatorname{Re}\gamma > p$ şi $\alpha < 1 \leq p < \delta < \operatorname{Re}\gamma$. Fie $\varphi \in \Sigma K_{p,0}(\alpha, \delta)$ şi $g \in \Sigma \mathcal{C}_{p,0}(\alpha, \delta; \varphi)$, atunci*

$$J_{p,\gamma}(g) \in \Sigma \mathcal{C}_{p,0}(\alpha, \delta; \Phi),$$

unde $\Phi = J_{p,\gamma}(\varphi)$.

Menţionăm că Teorema 4.3.4 şi Teorema 4.3.5 nu sunt publicate până în prezent.

4.4 Subclase ale clasei Σ_p definite cu ajutorul unei transformări multiplicative

Rezultatele cuprinse în acest paragraf sunt originale şi sunt publicate în [93].
Fie $n \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{N}^*$ şi $\lambda \in \mathbb{C}$ cu $\operatorname{Re}\lambda > p$. Considerăm operatorul $J^n_{p,\lambda}$ pe Σ_p astfel:

$$J^n_{p,\lambda}g(z) = \frac{a_{-p}}{z^p} + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda - p}{k + \lambda}\right)^n a_k z^k, \text{ unde } g(z) = \frac{a_{-p}}{z^p} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k.$$

Menţionăm că operatorul de mai sus poate fi găsit şi în [5]. Avem următoarele proprietăţi pentru operatorul considerat mai sus:

1. $J^{-1}_{p,\lambda}g(z) = \dfrac{1}{\lambda - p} zg'(z) + \dfrac{\lambda}{\lambda - p} g(z),\ g \in \Sigma_p,$

2. $J^0_{p,\lambda}g(z) = g(z),\ g \in \Sigma_p,$

3. $J^1_{p,\lambda}g(z) = \dfrac{\lambda - p}{z^\lambda} \displaystyle\int_0^z t^{\lambda-1} g(t)dt = J_{p,\lambda}(g)(z),\ g \in \Sigma_p,$

4. Dacă $g \in \Sigma_p$ cu $J^n_{p,\lambda}g \in \Sigma_p$, atunci $J^m_{p,\lambda}(J^n_{p,\lambda}g) = J^{n+m}_{p,\lambda}g,$ pentru $m, n \in \mathbb{Z}$.

Remarca 4.4.1. *[93]* Fie $p \in \mathbb{N}^*$ şi $\lambda \in \mathbb{C}$ cu $\operatorname{Re}\lambda > p$. Ştim din [91] că dacă $g \in \Sigma_p$, atunci $J_{p,\lambda}(g) \in \Sigma_p$, prin urmare, din punctul 4, prin folosirea inducţiei obţinem că

$$J^n_{p,\lambda}g \in \Sigma_p \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}^*.$$

Se observă din punctul 1 că pentru $g \in \Sigma_p$ avem $J^{-1}_{p,\lambda}g \in \Sigma_p$, deci

$$J^{-n}_{p,\lambda}g \in \Sigma_p \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}^*.$$

În consecinţă avem $J^n_{p,\lambda} : \Sigma_p \to \Sigma_p$ când $n \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in \mathbb{C}$ cu $\operatorname{Re}\lambda > p$.

Este uşor de verificat că avem şi următoarele proprietăţi pentru $J^n_{p,\lambda}$, când $\operatorname{Re}\lambda > p$:

1. $J^n_{p,\lambda}(J^m_{p,\lambda}g(z)) = J^{n+m}_{p,\lambda}g(z)$, $n, m \in \mathbb{Z}$, $g \in \Sigma_p$,

2. $J^n_{p,\gamma}(J^m_{p,\lambda}g(z)) = J^m_{p,\lambda}(J^n_{p,\gamma}g(z))$, $n, m \in \mathbb{Z}$, $g \in \Sigma_p$, $\operatorname{Re}\gamma > p$,

3. $J^n_{p,\lambda}(g_1 + g_2)(z) = J^n_{p,\lambda}g_1(z) + J^n_{p,\lambda}g_2(z)$, $g_1, g_2 \in \Sigma_p$, $n \in \mathbb{Z}$,

4. $J^n_{p,\lambda}(cg)(z) = cJ^n_{p,\lambda}g(z)$, $c \in \mathbb{C}^*$, $n \in \mathbb{Z}$,

5. $J^n_{p,\lambda}(zg'(z)) = z(J^n_{p,\lambda}g(z))' = (\lambda - p)J^{n-1}_{p,\lambda}g(z) - \lambda J^n_{p,\lambda}g(z)$, $n \in \mathbb{Z}$, $g \in \Sigma_p$.

Remarca 4.4.2. *[93]*

1. Dacă $\lambda = 2$ şi $p = 1$, avem

$$J^n_{1,2}g(z) = \frac{a_{-1}}{z} + \sum_{k=0}^{\infty}(k+2)^{-n}a_k z^k,$$

   şi acest operator a fost studiat de Cho şi Kim [17] pentru $n \in \mathbb{Z}$ şi de Uralegaddi şi Somanatha [97] pentru $n < 0$.

2. Se observă imediat că

$$z^2 J^n_{1,2}g(z) = D^n(z^2 g(z)),\ g \in \Sigma_{1,0}\,,$$

   unde D^n este binecunoscutul operator diferenţial Sălăgean de ordin n [82], definit prin $D^n f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} k^n a_k z^k$, $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$.

3. $J^n_{p,\lambda}$ este o extindere la clasa funcţiilor meromorfe a operatorului K^n_p, definit pe $A(p) = \left\{ f \in H(U) : f(z) = z^p + \sum_{n=1}^{\infty} a_{p+n} z^{p+n} \right\}$, care a fost introdus în [87]. De asemenea, pentru $n \geq 0$ avem că K^n_p este operatorul liniar Komatu, definit în [35].

4. Observăm că pentru $n > 0$, $J^n_{p,\lambda}$ este operator integral în timp ce $J^{-n}_{p,\lambda}$ este un operator diferenţial cu proprietatea că $J^{-n}_{p,\lambda}(J^n_{p,\lambda} g) = g$, $g \in \Sigma_p$.

Inspiraţi de clasele considerate în paragrafele precedente, precum şi de clasele definite în [86], considerăm următoarele clase:

Definiţia 4.4.1. *[93] Pentru* $p \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{Z}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} \lambda > p$ *şi* $\alpha < p < \delta$ *definim clasele:*

$$\Sigma S^n_{p,\lambda}(\alpha) = \left\{ g \in \Sigma_p : \operatorname{Re} \left[-\frac{z \left(J^n_{p,\lambda} g(z) \right)'}{J^n_{p,\lambda} g(z)} \right] > \alpha,\ z \in U \right\},$$

$$\Sigma S^n_{p,\lambda}(\alpha, \delta) = \left\{ g \in \Sigma_p : \alpha < \operatorname{Re} \left[-\frac{z \left(J^n_{p,\lambda} g(z) \right)'}{J^n_{p,\lambda} g(z)} \right] < \delta,\ z \in U \right\}.$$

Remarca 4.4.3. *[93]*

1. Avem $g \in \Sigma S^n_{p,\lambda}(\alpha)$ dacă şi numai dacă $J^n_{p,\lambda} g \in \Sigma^*_p(\alpha)$, respectiv $g \in \Sigma S^n_{p,\lambda}(\alpha, \delta)$ dacă şi numai dacă $J^n_{p,\lambda} g \in \Sigma^*_p(\alpha, \delta)$.

2. Folosind egalitatea $z(J^n_{p,\lambda} g(z))' = (\lambda - p) J^{n-1}_{p,\lambda} g(z) - \lambda J^n_{p,\lambda} g(z)$, observăm că pentru $\operatorname{Re} \lambda > p$ condiţia

$$\alpha < \operatorname{Re} \left[-\frac{z \left(J^n_{p,\lambda} g(z) \right)'}{J^n_{p,\lambda} g(z)} \right] < \delta,\ z \in U,$$

este echivalentă cu

$$\operatorname{Re} \lambda - \delta < \operatorname{Re} \left[(\lambda - p) \frac{J^{n-1}_{p,\lambda} g(z)}{J^n_{p,\lambda} g(z)} \right] < \operatorname{Re} \lambda - \alpha,\ z \in U. \tag{4.4}$$

3. Avem

$$\Sigma S^0_{p,\lambda}(\alpha, \delta) = \Sigma^*_p(\alpha, \delta),$$

$$\Sigma S^1_{p,\lambda}(\alpha, \delta) = \left\{ g \in \Sigma_p : G(z) = \frac{\lambda - p}{z^\lambda} \int_0^z t^{\lambda - 1} g(t) dt \in \Sigma^*_p(\alpha, \delta) \right\}.$$

Teorema următoare ne dă o legătură între clasele $\Sigma S^n_{p,\lambda}(\alpha)$ şi $\Sigma S^{n-1}_{p,\lambda}(\alpha)$, respectiv între $\Sigma S^n_{p,\lambda}(\alpha, \delta)$ şi $\Sigma S^{n-1}_{p,\lambda}(\alpha, \delta)$.

Teorema 4.4.1. *[93] Fie $p \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{Z}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ cu $\operatorname{Re}\lambda > p$, $\alpha < p < \delta$ şi $g \in \Sigma_p$. Atunci*

$$g \in \Sigma S^n_{p,\lambda}(\alpha) \Leftrightarrow J_{p,\lambda}(g) \in \Sigma S^{n-1}_{p,\lambda}(\alpha),$$

respectiv

$$g \in \Sigma S^n_{p,\lambda}(\alpha, \delta) \Leftrightarrow J_{p,\lambda}(g) \in \Sigma S^{n-1}_{p,\lambda}(\alpha, \delta),$$

unde $J_{p,\lambda}(g)(z) = \dfrac{\lambda - p}{z^\lambda} \displaystyle\int_0^z t^{\lambda-1} g(t) dt.$

Teorema 4.4.2. *[93] Fie $p \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{Z}, \lambda, \gamma \in \mathbb{C}$ cu $\operatorname{Re}\lambda > p$ şi $\alpha < p < \delta < \operatorname{Re}\gamma$. Atunci*

$$g \in \Sigma S^n_{p,\lambda}(\alpha, \delta) \Rightarrow J_{p,\gamma}(g) \in \Sigma S^n_{p,\lambda}(\alpha, \delta).$$

Corolarul 4.4.1. *[93] Fie $n \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{N}^*, \lambda \in \mathbb{C}$ şi $\alpha < p < \delta < \operatorname{Re}\lambda$. Atunci avem*

$$\Sigma S^n_{p,\lambda}(\alpha, \delta) \subset \Sigma S^{n+1}_{p,\lambda}(\alpha, \delta).$$

Teorema 4.4.3. *[93] Fie $n \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{N}^*, \lambda, \gamma \in \mathbb{C}$ cu $\operatorname{Re}\lambda > p$ şi $\alpha < p < \operatorname{Re}\gamma \leq \delta$. Dacă $g \in \Sigma S^n_{p,\lambda}(\alpha, \delta)$ şi satisface condiţia*

$$\frac{z\left[J^n_{p,\lambda}(g)(z)\right]'}{J^n_{p,\lambda}(g)(z)} + \gamma \prec R_{\gamma-p,p}(z),$$

atunci $J_{p,\gamma}(g) \in \Sigma S^n_{p,\lambda}(\alpha, \delta)$.

Dacă se consideră în Teorema 4.4.3 că $\delta \to \infty$ se obţine:

Teorema 4.4.4. *[93] Fie $n \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{N}^*, \lambda, \gamma \in \mathbb{C}$ cu $\operatorname{Re}\lambda > p$ şi $\alpha < p < \operatorname{Re}\gamma$. Dacă $g \in \Sigma S^n_{p,\lambda}(\alpha)$ şi satisface condiţia*

$$\frac{z\left[J^n_{p,\lambda}(g)(z)\right]'}{J^n_{p,\lambda}(g)(z)} + \gamma \prec R_{\gamma-p,p}(z),$$

atunci $J_{p,\gamma}(g) \in \Sigma S^n_{p,\lambda}(\alpha)$.

Teorema 4.4.5. *[93] Fie $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}^*, \lambda, \gamma \in \mathbb{C}$ şi $\alpha < p < \operatorname{Re}\gamma \leq \operatorname{Re}\lambda \leq \delta$. Dacă $h \in \Sigma S^n_{p,\lambda}(\alpha, \delta)$ şi satisface condiţia*

$$\frac{zh'(z)}{h(z)} + \gamma \prec R_{\gamma-p,p}(z),$$

atunci $J_{p,\gamma}(h) \in \Sigma S^n_{p,\lambda}(\alpha, \delta)$.

Considerând $\gamma = \lambda$ în teorema precedentă, obţinem:

Corolarul 4.4.2. *[93] Fie $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in \mathbb{C}$ şi $h \in \Sigma S^n_{p,\lambda}(\alpha, \delta)$ cu $\alpha < p < \operatorname{Re}\lambda \leq \delta$. Dacă*

$$\frac{zh'(z)}{h(z)} + \lambda \prec R_{\lambda-p,p}(z),$$

atunci $J_{p,\lambda}(h) \in \Sigma S^n_{p,\lambda}(\alpha, \delta)$.

Dacă vom considera $n = 0$ în Corolarul 4.4.2 avem:

Corolarul 4.4.3. *[93] Fie $p \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in \mathbb{C}$ şi $\alpha < p < \operatorname{Re}\lambda \leq \delta$. Dacă $h \in \Sigma_p^*(\alpha, \delta)$ cu*

$$\frac{zh'(z)}{h(z)} + \lambda \prec R_{\lambda-p,p}(z),$$

atunci $J_{p,\lambda}(h) \in \Sigma_p^*(\alpha, \delta)$.

Dacă în Corolarul 4.4.3 considerăm $\delta \mapsto \infty$ avem:

Corolarul 4.4.4. *[93] Fie $p \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in \mathbb{C}$ şi $\alpha < p < \operatorname{Re}\lambda$. Dacă $h \in \Sigma_p^*(\alpha)$ cu*

$$\frac{zh'(z)}{h(z)} + \lambda \prec R_{\lambda-p,p}(z),$$

atunci $J_{p,\lambda}(h) \in \Sigma_p^*(\alpha)$.

Observăm că, Corolarul 4.4.3 şi Corolarul 4.4.4 au fost de asemenea obţinute şi în paragraful al doilea al acestui capitol.

Teorema 4.4.6. *[93] Fie $n \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{N}^*$, $\lambda, \gamma \in \mathbb{C}$ cu $\operatorname{Re}\lambda > p$ şi $\alpha < p < \operatorname{Re}\gamma$. Dacă $g \in \Sigma S_{p,\lambda}^n(\alpha)$ cu $J_{p,\gamma}(J_{p,\lambda}^n(g)(z)) \neq 0$, $z \in \dot{U}$, atunci*

$$J_{p,\gamma}(g) \in \Sigma S_{p,\lambda}^n(\alpha).$$

Considerând $n = 0$ şi $\lambda = \gamma$ în teorema de mai sus, obţinem următorul corolar pe care îl regăsim şi în paragraful al doilea al acestui capitol.

Corolarul 4.4.5. *[93] Fie $p \in \mathbb{N}^*$, $\gamma \in \mathbb{C}$ şi $\alpha < p < \operatorname{Re}\gamma$. Dacă $g \in \Sigma_p^*(\alpha)$ cu $z^p J_{p,\gamma}(g)(z) \neq 0$, $z \in U$, atunci $J_{p,\gamma}(g) \in \Sigma_p^*(\alpha)$.*

Capitolul 5

Aplicaţii ale subordonărilor şi superordonărilor diferenţiale de tip Briot-Bouquet

În acest capitol se definesc noi subclase de funcţii meromorfe multivalente folosind subordonarea şi superordonarea şi se stabilesc condiţii suficiente astfel încât prin aplicarea unuia dintre operatorii $J_{p,\beta,\gamma}$ sau $J_{p,\gamma}$ să obţinem funcţii din clase similare celor iniţiale. Rezultatele prezentate în acest capitol sunt originale şi au fost trimise spre publicare.

5.1 Operatorul $J_{p,\beta,\gamma}$ şi clasa $\Sigma S_p(h_1, h_2)$

Rezultatele prezentate în acest paragraf sunt originale şi vor fi publicate în [94]. Primul rezultat este o lemă simplă de care vom avea nevoie la prezentarea ulterioară a unor exemple legate de teoremele incluse în acest capitol.

Lema 5.1.1. *[94] Fie $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ cu $\gamma \neq 0$, $\alpha + \gamma \neq 0$ şi $|\beta| < |\gamma|$. Fie h funcţia*

$$h(z) = z + \frac{\alpha z}{\beta z + \gamma},\ z \in U.$$

Dacă avem

$$4|\alpha\beta\gamma^2| \leq (|\gamma| - |\beta|)^3|\alpha + \gamma|, \tag{5.1}$$

atunci h este convexă în U.

Observaţia 5.1.1. *[94] 1. Este evident că dacă h este o funcţie convexă în U (cu $h'(0) \neq 0$), atunci $\delta_1 + \delta_2 h(rz)$ este de asemenea o funcţie convexă, unde $r \in (0, 1]$, $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{C}$ cu $\delta_2 \neq 0$.*
2. Dacă vom considera în lema de mai sus $\alpha = |\beta| = 1$, atunci condiţia (5.1) devine

$$4|\gamma|^2 \leq |\gamma + 1|(|\gamma| - 1)^3. \tag{5.2}$$

Printr-un calcul relativ uşor se observă că (5.2) are loc pentru orice număr real $\gamma \geq 3,2$. Cu alte cuvinte, funcţiile

$$z + \frac{z}{\gamma + z},\ z + \frac{z}{\gamma - z},\ z \in U,$$

sunt funcţii convexe când $\gamma \geq 3,2$.

Menţionăm că în [70] autorii au demonstrat că funcţia

$$h(z) = 1 + z + \frac{z}{z+2},\ z \in U,$$

este convexă în U, deci funcţia $z + \dfrac{z}{2+z}$ este şi ea convexă.

În continuare vom defini două subclase ale clasei Σ_p asociate cu superordonare şi subordonare, astfel încât în anumite cazuri particulare, aceste noi subclase sunt binecunoscutele clase de funcţii meromorfe stelate.

Definiţia 5.1.1. *[94] Fie $p \in \mathbb{N}^*$ şi $h_1, h_2, h \in H(U)$ cu $h_1(0) = h_2(0) = h(0) = p$ şi $h_1(z) \prec h_2(z)$. Definim:*

$$\Sigma S_p(h_1, h_2) = \left\{ g \in \Sigma_p : h_1(z) \prec -\frac{zg'(z)}{g(z)} \prec h_2(z) \right\},$$

$$\Sigma S_p(h) = \left\{ g \in \Sigma_p : -\frac{zg'(z)}{g(z)} \prec h(z) \right\}.$$

Se observă că dacă se consideră $h(z) = h_{p,\alpha}(z) = \dfrac{p + (p - 2\alpha)z}{1 - z}$, $z \in U, 0 \leq \alpha < p$, cum $h_{p,\alpha}(U) = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \alpha\}$, avem $\Sigma S_p(h_{p,\alpha}) = \Sigma_p^*(\alpha)$.

În teoremele care urmează vom stabili condiţii suficiente astfel încât prin aplicarea operatorului integral $J_{p,\beta,\gamma}$ unei funcţii care aparţine unei clase definite anterior să obţinem o funcţie care aparţine unei clase de acelaşi tip. Reamintim că operatorul integral $J_{p,\beta,\gamma}$ este definit prin relaţia

$$J_{p,\beta,\gamma}(g)(z) = \left[\frac{\gamma - p\beta}{z^\gamma} \int_0^z g^\beta(t) t^{\gamma - 1} dt \right]^{\frac{1}{\beta}},\ g \in \Sigma_p,$$

şi a fost introdus la paragraful 4.1.

Teorema 5.1.1. *[94] Fie $p \in \mathbb{N}^*$ şi $\beta, \gamma \in \mathbb{C}$ cu $\beta \neq 0$ şi $\operatorname{Re}(\gamma - p\beta) > 0$. Fie h_1 şi h_2 funcţii convexe în U cu $h_1(0) = h_2(0) = p$ şi fie $g \in \Sigma S_p(h_1, h_2)$ astfel încât*

$$\beta \frac{zg'(z)}{g(z)} + \gamma \prec R_{\gamma - \beta p, p}(z).$$

Presupunem că ecuaţiile diferenţiale Briot-Bouquet

$$q(z) + \frac{zq'(z)}{\gamma - \beta q(z)} = h_1(z), \quad q(z) + \frac{pzq'(z)}{\gamma - \beta q(z)} = h_2(z),\ z \in U, \tag{5.3}$$

au soluţiile univalente q_1^1, *respectiv* q_2^p, *cu* $q_1^1(0) = q_2^p(0) = p$ *şi* $q_1^1 \prec h_1$, $q_2^p \prec h_2$. *Fie* $G = J_{p,\beta,\gamma}(g)$. *Dacă* $\dfrac{zg'(z)}{g(z)}$ *este univalentă în* U *şi* $\dfrac{zG'(z)}{G(z)} \in Q$, *atunci*

$$G \in \Sigma S_p(q_1^1, q_2^p).$$

Funcţiile q_1^1 *şi* q_2^p *sunt cea mai bună subordonantă, respectiv cea mai bună (p,p)-dominantă.*

Dacă vom considera în ipoteza Teoremei 5.1.1 condiţia

$$\mathrm{Re}\,[\gamma - \beta h_2(z)] > 0,\ z \in U,$$

în loc de

$$\beta\frac{zg'(z)}{g(z)} + \gamma \prec R_{\gamma-\beta p,p}(z),$$

obţinem următorul rezultat.

Teorema 5.1.2. *[94] Fie* $p \in \mathbb{N}^*$ *şi* $\beta, \gamma \in \mathbb{C}$ *cu* $\beta \neq 0$ *şi* $\mathrm{Re}\,(\gamma - p\beta) > 0$. *Fie* h_1 *şi* h_2 *funcţii convexe în* U *cu* $h_1(0) = h_2(0) = p$, $h_1 \prec h_2$ *şi*

$$\mathrm{Re}\,[\gamma - \beta h_2(z)] > 0,\ z \in U.$$

Fie $g \in \Sigma S_p(h_1, h_2)$ *şi* $G = J_{p,\beta,\gamma}(g)$. *Dacă* $\dfrac{zg'(z)}{g(z)}$ *este univalentă în* U *şi* $\dfrac{zG'(z)}{G(z)} \in Q$, *atunci*

$$G \in \Sigma S_p(q_1^1, q_2^p),$$

unde q_1^1 *şi* q_2^p *sunt soluţiile univalente ale ecuaţiilor diferenţiale Briot-Bouquet*

$$q(z) + \frac{zq'(z)}{\gamma - \beta q(z)} = h_1(z),\ z \in U, \tag{5.4}$$

respectiv

$$q(z) + \frac{pzq'(z)}{\gamma - \beta q(z)} = h_2(z),\ z \in U, \tag{5.5}$$

cu $q_1^1(0) = q_2^p(0) = p$.

Funcţiile q_1^1 *şi* q_2^p *sunt cea mai bună subordonantă, respectiv cea mai bună* (p, p)*-dominantă.*

Observaţia 5.1.2. *[94]* Presupunem că sunt îndeplinite condiţiile din ipoteza teoremei precedente. Dacă, în plus, considerăm că q_1^p şi q_2^1 sunt soluţiile univalente ale ecuaţiilor diferenţiale Briot-Bouquet

$$q(z) + \frac{pzq'(z)}{\gamma - \beta q(z)} = h_1(z),\ z \in U,$$

respectiv

$$q(z) + \frac{zq'(z)}{\gamma - \beta q(z)} = h_2(z),\ z \in U,$$

cu $q_1^p(0) = q_2^1(0) = p$, avem din demonstraţia teoremei de mai sus şi din Teorema 2.3.1

$$q_1^p(z) \prec q_1^1(z) \prec -\frac{zG'(z)}{G(z)} \prec q_2^p(z) \prec q_2^1(z).$$

Deci $G \in \Sigma S_p(q_1^1, q_2^p)$ reprezintă cea mai bună alegere.

Considerând pentru Teorema 5.1.1 numai subordonarea obţinem următorul rezultat.

Teorema 5.1.3. *Fie $p \in \mathbb{N}^*$ şi $\beta, \gamma \in \mathbb{C}$ cu $\beta \neq 0$ şi $\mathrm{Re}\,(\gamma - p\beta) > 0$. Fie h o funcţie convexă în U cu $h(0) = p$ şi $g \in \Sigma S_p(h)$ astfel încât*

$$\beta\frac{zg'(z)}{g(z)} + \gamma \prec R_{\gamma-\beta p,p}(z).$$

Presupunem că ecuaţia diferenţială Briot-Bouquet

$$q(z) + \frac{pzq'(z)}{\gamma - \beta q(z)} = h(z),\ z \in U,$$

are soluţia univalentă q cu $q(0) = p$ şi $q \prec h$. Atunci

$$G = J_{p,\beta,\gamma}(g) \in \Sigma S_p(q).$$

Funcţia q este cea mai bună (p,p)-dominantă.

Teorema 5.1.4. *[94] Fie $p \in \mathbb{N}^*$ şi $\beta, \gamma \in \mathbb{C}$ cu $\beta \neq 0$ şi $\mathrm{Re}\,[\gamma - p\beta] > 0$. Fie h_1 şi h_2 funcţii analitice în U cu $h_1(0) = h_2(0) = p$, $h_1 \prec h_2$ şi*

$$(i) \quad \gamma - \beta h_2(z) \prec R_{\gamma-p\beta,1}(z).$$

Dacă q_1 şi q_2 sunt soluţiile analitice ale ecuaţiilor diferenţiale Briot-Bouquet

$$q(z) + \frac{zq'(z)}{\gamma - \beta q(z)} = h_1(z),\ z \in U, \tag{5.6}$$

respectiv

$$q(z) + \frac{pzq'(z)}{\gamma - \beta q(z)} = h_2(z),\ z \in U, \tag{5.7}$$

cu $q_1(0) = q_2(0) = p$ şi dacă

$$(ii) \quad \frac{zq_1'(z)}{\gamma - \beta q_1(z)} \quad \text{este stelată în } U,$$

$$(iii) \quad h_2 \quad \text{este convexă sau} \quad \frac{zq_2'(z)}{\gamma - \beta q_2(z)} \quad \text{este stelată},$$

atunci q_1 şi q_2 sunt univalente în U.

Mai mult, dacă $g \in \Sigma S_p(h_1, h_2)$ *astfel încât* $\dfrac{zg'(z)}{g(z)}$ *este univalentă în* U *şi* $\dfrac{zG'(z)}{G(z)} \in Q$*, unde* $G = J_{p,\beta,\gamma}(g)$*, atunci*

$$G \in \Sigma S_p(q_1, q_2).$$

Funcţiile q_1 *şi* q_2 *sunt cea mai bună subordonantă, respectiv cea mai bună* (p,p)*-dominantă.*

Din Teorema 2.3.2, cum $p \neq 0$, obţinem că soluţiile q_1 şi q_2 (din teorema precedentă) sunt date de:

$$q_1(z) = z^\gamma H_1^{-p\beta}(z)\left[-\beta\int_0^z H_1^{-p\beta}(t)t^{\gamma-1}dt\right]^{-1} + \frac{\gamma}{\beta} = \left[-\beta\int_0^1\left[\frac{H_1(tz)}{H_1(z)}\right]^{-p\beta}t^{\gamma-1}dt\right]^{-1} + \frac{\gamma}{\beta},$$
(5.8)

$$q_2(z) = z^{\frac{\gamma}{p}} H_2^{-\beta}(z)\left[\frac{-\beta}{p}\int_0^z H_2^{-\beta}(t)t^{\frac{\gamma}{p}-1}dt\right]^{-1} + \frac{\gamma}{\beta} = \left[\frac{-\beta}{p}\int_0^1\left[\frac{H_2(tz)}{H_2(z)}\right]^{-\beta}t^{\frac{\gamma}{p}-1}dt\right]^{-1} + \frac{\gamma}{\beta},$$
(5.9)

unde

$$H_k(z) = z\exp\int_0^z \frac{h_k(t)-p}{pt}dt,\ k = 1, 2.$$

Dacă pentru Teorema 5.1.4 considerăm numai subordonarea vom avea următorul rezultat.

Teorema 5.1.5. *[94] Fie* $p \in \mathbb{N}^*$ *şi* $\beta, \gamma \in \mathbb{C}$ *cu* $\beta \neq 0$ *şi* $\mathrm{Re}\,(\gamma - p\beta) > 0$*. Fie* $h \in H(U)$ *cu* $h(0) = p$ *astfel încât*

$$(i) \quad \gamma - \beta h(z) \prec R_{\gamma-\beta p,p}(z).$$

Dacă funcţia q *este soluţia analitică a ecuaţiei diferenţiale Briot-Bouquet*

$$q(z) + \frac{pzq'(z)}{\gamma - \beta q(z)} = h(z),\ z \in U,$$

cu $q(0) = p$*, dată de (5.9) şi dacă*

$$(ii) \quad h \quad \text{este convexă sau } \frac{zq'(z)}{\gamma - \beta q(z)} \quad \text{este stelată},$$

atunci q *este univalentă în* U*.*
Dacă, în plus, $g \in \Sigma S_p(h)$ *şi* $G = J_{p,\beta,\gamma}(g)$*, atunci* $G \in \Sigma S_p(q)$*.*
Funcţia q *este cea mai bună (p,p)-dominantă.*

Considerând în teorema precedentă că funcţia h este convexă obţinem următorul corolar:

Corolarul 5.1.1. *[94] Fie* $p \in \mathbb{N}^*$ *şi* $\beta, \gamma \in \mathbb{C}$ *cu* $\beta \neq 0$ *şi* $\operatorname{Re}(\gamma - p\beta) > 0$. *Fie* $g \in \Sigma S_p(h)$ *cu* h *convexă în* U, $h(0) = p$. *Dacă funcţia* h *verifică relaţia*

$$\gamma - \beta h(z) \prec R_{\gamma - \beta p, p}(z),$$

atunci

$$G = J_{p,\beta,\gamma}(g) \in \Sigma S_p(q),$$

unde q *este soluţia univalentă a ecuaţiei diferenţiale Briot-Bouquet*

$$q(z) + \frac{pzq'(z)}{\gamma - \beta q(z)} = h(z)\,,\ z \in U,$$

cu $q(0) = p$.
Funcţia q *este cea mai bună (p,p)-dominantă.*

În continuare vom prezenta o aplicaţie a corolarului de mai sus, în cazul $\beta = 1$ şi $\gamma \in \mathbb{R}$, pentru o anumită funcţie h. Vom folosi notaţia $J_{p,\gamma}$ în loc de $J_{p,1,\gamma}$.

Corolarul 5.1.2. *[94] Fie* $p \in \mathbb{N}^*$ *şi* $\gamma \geq p+3$ *astfel încât* $4p(\gamma - p)^2 \leq \gamma(\gamma - p - 1)^3$. *Dacă* $g \in \Sigma S_p(h)$ *cu* $h(z) = p + z + \dfrac{pz}{\gamma - p - z}$, *atunci*

$$G = J_{p,\gamma}(g) \in \Sigma S_p(p + z),$$

adică $\left|\dfrac{zG'(z)}{G(z)} + p\right| < 1$, $z \in U$. *Prin urmare,*

$$p - 1 < \operatorname{Re}\left[-\frac{zG'(z)}{G(z)}\right] < p + 1,\ z \in U,$$

adică $G \in \Sigma_p^*(p - 1, p + 1)$.

Considerând pentru Corolarul 5.1.1 condiţia $\operatorname{Re}[\gamma - \beta h(z)] > 0$, $z \in U$, în loc de $\gamma - \beta h(z) \prec R_{\gamma - \beta p, p}(z)$, obţinem:

Corolarul 5.1.3. *[94] Fie* $p \in \mathbb{N}^*$ *şi* $\beta, \gamma \in \mathbb{C}$ *cu* $\beta \neq 0$ *şi* $\operatorname{Re}(\gamma - p\beta) > 0$. *Fie* $g \in \Sigma S_p(h)$ *cu* h *convexă în* U, $h(0) = p$. *Dacă*

$$\operatorname{Re}[\gamma - \beta h(z)] > 0,\ z \in U,$$

atunci

$$G = J_{p,\beta,\gamma}(g) \in \Sigma S_p(q),$$

unde q *este soluţia univalentă a ecuaţiei diferenţiale Briot-Bouquet*

$$q(z) + \frac{pzq'(z)}{\gamma - \beta q(z)} = h(z)\,,\ z \in U,\ q(0) = p.$$

Funcţia q *este cea mai bună (p,p)-dominantă.*

Deoarece pentru Corolarul 5.1.3 avem $q \prec h$ (a se vedea Teorema 2.3.1) obţinem următorul corolar:

Corolarul 5.1.4. *[94] Fie $p \in \mathbb{N}^*$ şi $\beta, \gamma \in \mathbb{C}$ cu $\beta \neq 0$ şi $\operatorname{Re}(\gamma - p\beta) > 0$. Fie $g \in \Sigma S_p(h)$ cu h convexă în U, $h(0) = p$. Dacă*

$$\operatorname{Re}[\gamma - \beta h(z)] > 0,\ z \in U,$$

atunci

$$G = J_{p,\beta,\gamma}(g) \in \Sigma S_p(h).$$

În continuare, folosind Corolarul 5.1.4 pentru o anumită funcţie h, vom prezenta un rezultat care apare şi în paragraful 4.2.

Considerăm $h(z) = h_{p,\alpha}(z) = \dfrac{p + (p - 2\alpha)z}{1 - z}$, $z \in U$, unde $p \in \mathbb{N}^*$ şi $0 \leq \alpha < p$. Avem $h_{p,\alpha}(U) = \{z \in \mathbb{C}/\operatorname{Re} z > \alpha\}$ şi $h_{p,\alpha}(0) = p$.

Prin urmare

$$g \in \Sigma S_p(h_{p,\alpha}) \Leftrightarrow g \in \Sigma_p^*(\alpha).$$

Avem acum următorul rezultat:

Corolarul 5.1.5. *[94] Fie $p \in \mathbb{N}^*$, $\beta < 0$, $\gamma \in \mathbb{C}$ şi $\dfrac{\operatorname{Re}\gamma}{\beta} \leq \alpha < p$. Atunci*

$$g \in \Sigma_p^*(\alpha) \Rightarrow G = J_{p,\beta,\gamma}(g) \in \Sigma_p^*(\alpha).$$

5.2 Operatorul $J_{p,\gamma}$ şi clasa $\Sigma K_p(h_1, h_2)$

Rezultatele prezentate în această secţiune sunt originale şi vor fi publicate în [95]. În continuare vom defini câteva subclase ale clasei Σ_p asociate cu superordonare şi subordonare, astfel încât, în anumite cazuri particulare, aceste noi subclase sunt binecunoscutele clase de funcţii meromorfe convexe.

Definiţia 5.2.1. *[95] Fie $p \in \mathbb{N}^*$ şi $h_1, h_2, h \in H(U)$ cu $h_1(0) = h_2(0) = h(0) = p$ şi $h_1(z) \prec h_2(z)$. Vom defini:*

$$\Sigma K_p(h_1, h_2) = \left\{ g \in \Sigma_p : h_1(z) \prec -\left[1 + \frac{zg''(z)}{g'(z)}\right] \prec h_2(z) \right\},$$

$$\Sigma K_p(h) = \left\{ g \in \Sigma_p : -\left[1 + \frac{zg''(z)}{g'(z)}\right] \prec h(z) \right\},$$

$$\Sigma K_{p,0}(h_1, h_2) = \Sigma K_p(h_1, h_2) \cap \Sigma_{p,0}, \Sigma K_{p,0}(h) = \Sigma K_p(h) \cap \Sigma_{p,0}.$$

Se observă că pentru funcţia $h(z) = h_{p,\alpha}(z) = \dfrac{p + (p - 2\alpha)z}{1 - z}$, $z \in U, 0 \leq \alpha < p$, avem $h(U) = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \alpha\}$, deci $\Sigma K_p(h_{p,\alpha}) = \Sigma K_p(\alpha)$.

În teoremele care urmează vom stabili condiţii suficiente astfel încât prin aplicarea operatorului integral $J_{p,\gamma}$ unei funcţii care aparţine unei clase definite anterior să obţinem o funcţie care aparţine unei clase de acelaşi tip. Reamintim că operatorul integral $J_{p,\gamma}$ este definit prin relaţia

$$J_{p,\gamma}(g)(z) = \frac{\gamma - p}{z^\gamma} \int_0^z g(t)t^{\gamma-1}dt, \; g \in \Sigma_p,$$

şi a fost introdus la paragraful 4.1.

Teorema 5.2.1. *[95] Fie $p \in \mathbb{N}^*$ şi $\gamma \in \mathbb{C}$ cu $\operatorname{Re}\gamma > p$. Fie h_1 şi h_2 funcţii convexe în U cu $h_1(0) = h_2(0) = p$ şi $g \in \Sigma K_p(h_1, h_2)$ cu $z^{p+1}J'_{p,\gamma}(g)(z) \neq 0$, $z \in U$. Presupunem că ecuaţiile diferenţiale Briot-Bouquet*

$$(5.10) \qquad q(z) + \frac{zq'(z)}{\gamma - q(z)} = h_1(z), \quad q(z) + \frac{(p+1)zq'(z)}{\gamma - q(z)} = h_2(z), \; z \in U,$$

au soluţiile univalente q_1^1, respectiv q_2^{p+1}, cu $q_1^1(0) = q_2^{p+1}(0) = p$ şi $q_1^1 \prec h_1$, $q_2^{p+1} \prec h_2$. Fie $G = J_{p,\gamma}(g)$. Dacă $\frac{zg''(z)}{g'(z)}$ este univalentă în U şi $\frac{zG''(z)}{G'(z)} \in Q$, atunci

$$G \in \Sigma K_p(q_1^1, q_2^{p+1}).$$

Funcţiile q_1^1 şi q_2^{p+1} sunt cea mai bună subordonantă, respectiv cea mai bună (p,p+1)-dominantă.

Dacă se consideră în ipoteza Teoremei 5.2.1 condiţia

$$\operatorname{Re}[\gamma - h_2(z)] > 0, \; z \in U,$$

în loc de $z^{p+1}J'_{p,\gamma}(g)(z) \neq 0$, $z \in U$, obţinem următorul rezultat.

Teorema 5.2.2. *[95] Fie $p \in \mathbb{N}^*$ şi $\gamma \in \mathbb{C}$ cu $\operatorname{Re}\gamma > p$. Fie h_1 şi h_2 funcţii convexe în U cu $h_1(0) = h_2(0) = p$, $h_1 \prec h_2$ şi fie $g \in \Sigma K_p(h_1, h_2)$. Presupunem că*

$$\operatorname{Re}[\gamma - h_2(z)] > 0, \; z \in U.$$

Fie $G = J_{p,\gamma}(g)$. Dacă $\frac{zg''(z)}{g'(z)}$ este univalentă în U şi $\frac{zG''(z)}{G'(z)} \in Q$, atunci

$$G \in \Sigma K_p(q_1^1, q_2^{p+1}),$$

unde q_1^1 şi q_2^{p+1} sunt soluţiile univalente ale ecuaţiilor diferenţiale Briot-Bouquet

$$(5.11) \qquad q(z) + \frac{zq'(z)}{\gamma - q(z)} = h_1(z), \; z \in U,$$

respectiv

$$(5.12) \qquad q(z) + \frac{(p+1)zq'(z)}{\gamma - q(z)} = h_2(z), \; z \in U,$$

cu $q_1^1(0) = q_2^{p+1}(0) = p$.

Funcţiile q_1^1 şi q_2^{p+1} sunt cea mai bună subordonantă, respectiv cea mai bună $(p, p+1)$-dominantă.

Observaţia 5.2.1. *[95] Presupunem că sunt îndeplinite condiţiile din ipoteza Teoremei 5.2.2. Dacă, în plus, vom considera că q_1^{p+1} şi q_2^1 sunt soluţiile univalente ale ecuaţiilor diferenţiale Briot-Bouquet*

$$q(z) + \frac{(p+1)zq'(z)}{\gamma - q(z)} = h_1(z),\ z \in U, \tag{5.13}$$

respectiv

$$q(z) + \frac{zq'(z)}{\gamma - q(z)} = h_2(z),\ z \in U, \tag{5.14}$$

cu $q_1^{p+1}(0) = q_2^1(0) = p$, avem din teorema precedentă şi din Teorema 2.3.1 că

$$q_1^{p+1}(z) \prec q_1^1(z) \prec -1 - \frac{zG''(z)}{G'(z)} \prec q_2^{p+1}(z) \prec q_2^1(z).$$

Deci $G \in \Sigma K_p(q_1^1, q_2^{p+1})$ este cea mai bună alegere.

Dacă vom considera pentru Teorema 5.2.1 numai subordonarea vom obţine următorul rezultat.

Teorema 5.2.3. *[95] Fie $p \in \mathbb{N}^*$ şi $\gamma \in \mathbb{C}$ cu $\operatorname{Re}\gamma > p$. Fie h o funcţie convexă în U cu $h(0) = p$ şi $g \in \Sigma K_p(h)$ cu $z^{p+1}J'_{p,\gamma}(g)(z) \neq 0$, $z \in U$. Presupunem că ecuaţia diferenţială Briot-Bouquet*

$$q(z) + \frac{(p+1)zq'(z)}{\gamma - q(z)} = h(z),\ z \in U,$$

are soluţia univalentă q cu $q(0) = p$ şi $q \prec h$.
Atunci

$$G = J_{p,\gamma}(g) \in \Sigma K_p(q).$$

Funcţia q este cea mai bună (p,p+1)-dominantă.

Teorema 5.2.4. *[95] Fie $p \in \mathbb{N}^*$ şi $\gamma \in \mathbb{C}$ cu $\operatorname{Re}\gamma > p$. Fie $h_1, h_2 \in H(U)$ cu $h_1(0) = h_2(0) = p$, $h_1 \prec h_2$ şi*

$$(i)\quad \gamma - h_2(z) \prec R_{\gamma-p,1}(z),\ z \in U.$$

Dacă q_1 şi q_2 sunt soluţiile analitice ale ecuaţiilor diferenţiale Briot-Bouquet

$$q(z) + \frac{zq'(z)}{\gamma - q(z)} = h_1(z),\ z \in U, \tag{5.15}$$

respectiv

$$q(z) + \frac{(p+1)zq'(z)}{\gamma - q(z)} = h_2(z),\ z \in U, \tag{5.16}$$

şi dacă

$$(ii)\quad \frac{zq_1'(z)}{\gamma - q_1(z)} \quad \text{este stelată în } U,$$

$$(iii) \quad h_2 \quad \textit{este convexă sau} \quad \frac{zq_2'(z)}{\gamma - q_2(z)} \quad \textit{este stelată,}$$

atunci q_1 *şi* q_2 *sunt univalente în* U.

Mai mult, dacă $g \in \Sigma K_p(h_1, h_2)$ *astfel încât* $\dfrac{zg''(z)}{g'(z)}$ *este univalentă în* U *şi* $\dfrac{zG''(z)}{G'(z)} \in Q$, *unde* $G = J_{p,\gamma}(g)$, *atunci*

$$G \in \Sigma K_p(q_1, q_2).$$

Funcţiile q_1 *şi* q_2 *sunt cea mai bună subordonantă, respectiv cea mai bună (p,p+1)-dominantă.*

Din Teorema 2.3.2, cum $p \neq 0$ şi $\beta = -1$, obţinem că soluţiile q_1 şi q_2 (din teorema precedentă) sunt date de:

$$q_1(z) = z^{\gamma} H_1^{-p}(z) \left[-\int_0^z H_1^{-p}(t) t^{\gamma - 1} dt \right]^{-1} + \gamma, \tag{5.17}$$

$$q_2(z) = z^{\frac{\gamma}{p+1}} H_2^{-\frac{p}{p+1}}(z) \left[-\frac{1}{p+1} \int_0^z H_2^{-\frac{p}{p+1}}(t) t^{\frac{\gamma}{p+1} - 1} dt \right]^{-1} + \gamma, \tag{5.18}$$

unde

$$H_k(z) = z \exp \int_0^z \frac{h_k(t) - p}{pt} dt, \ k = 1, 2.$$

Dacă vom considera numai subordonarea pentru Teorema 5.2.4 vom avea următorul rezultat.

Teorema 5.2.5. *[95] Fie* $p \in \mathbb{N}^*, \gamma \in \mathbb{C}$ *cu* $\operatorname{Re} \gamma > p$, $h \in H(U)$ *cu* $h(0) = p$ *şi*

$$(i) \quad \gamma - h(z) \prec R_{\gamma - p, p}(z).$$

Dacă funcţia q *este soluţia analitică a ecuaţiei diferenţiale Briot-Bouquet*

$$q(z) + \frac{(p+1) z q'(z)}{\gamma - q(z)} = h(z), \ z \in U,$$

cu $q(0) = p$, *dată de (5.18), şi*

$$(ii) \quad h \quad \textit{este convexă sau} \quad \frac{zq'(z)}{\gamma - q(z)} \quad \textit{este stelată,}$$

atunci q *este univalentă în* U.
Dacă, în plus, $g \in \Sigma K_p(h)$ *şi* $G = J_{p,\gamma}(g)$, *atunci*

$$G \in \Sigma K_p(q).$$

Funcţia q *este cea mai bună (p,p+1)-dominantă.*

Dacă se consideră în teorema precedentă că funcţia h este convexă se obţine următorul corolar:

Corolarul 5.2.1. *[95] Fie $p \in \mathbb{N}^*, \gamma \in \mathbb{C}$ cu $\operatorname{Re}\gamma > p$ şi $g \in \Sigma K_p(h)$ cu h convexă în U. Dacă*

$$\gamma - h(z) \prec R_{\gamma-p,p}(z),$$

atunci

$$G = J_{p,\gamma}(g) \in \Sigma K_p(q),$$

unde q este soluţia univalentă a ecuaţiei diferenţiale Briot-Bouquet

$$q(z) + \frac{(p+1)zq'(z)}{\gamma - q(z)} = h(z)\,,\ z \in U,$$

cu $q(0) = p$.
Funcţia q este cea mai bună (p,p+1)-dominantă.

În continuare vom prezenta o aplicaţie a corolarului de mai sus, când h este o funcţie particulară.

Corolarul 5.2.2. *[95] Fie $p \in \mathbb{N}^*$ şi $\gamma \geq p+4$ asfel încât $4(p+1)(\gamma-p)^2 \leq (\gamma+1)(\gamma-p-1)^3$.*
Dacă $g \in \Sigma K_p(h)$ cu $h(z) = p + z + \dfrac{(p+1)z}{\gamma - p - z}$, atunci

$$G = J_{p,\gamma}(g) \in \Sigma K_p(p+z).$$

Dacă vom considera pentru Corolarul 5.2.1 condiţia $\operatorname{Re}[\gamma - h(z)] > 0$, $z \in U$, în loc de $\gamma - h(z) \prec R_{\gamma-p,p}(z)$, obţinem:

Corolarul 5.2.3. *[95] Fie $p \in \mathbb{N}^*, \gamma \in \mathbb{C}$ cu $\operatorname{Re}\gamma > p$ şi $g \in \Sigma K_p(h)$ cu h convexă în U. Dacă*

$$\operatorname{Re}[\gamma - h(z)] > 0,\ z \in U,$$

atunci

$$G = J_{p,\gamma}(g) \in \Sigma K_p(q),$$

unde q este soluţia univalentă a ecuaţiei diferenţiale Briot-Bouquet

$$q(z) + \frac{(p+1)zq'(z)}{\gamma - q(z)} = h(z)\,,\ z \in U,$$

cu $q(0) = p$.
Funcţia q este cea mai bună (p,p+1)-dominantă.

Cum pentru Corolarul 5.2.3 avem şi $q \prec h$ (a se vedea Teorema 2.3.1) obţinem următorul corolar:

Corolarul 5.2.4. *[95] Fie $p \in \mathbb{N}^*, \gamma \in \mathbb{C}$ cu $\operatorname{Re}\gamma > p$, $g \in \Sigma K_p(h)$ cu h convexă în U. Dacă*

$$\operatorname{Re}[\gamma - h(z)] > 0,\ z \in U,$$

atunci

$$G = J_{p,\gamma}(g) \in \Sigma K_p(h).$$

În continuare vom prezenta două exemple simple care folosesc corolarul precedent.

Exemplul 5.2.1. *Fie funcţia $h(z) = (\operatorname{Re}\gamma - p)z + p$, $z \in U$, unde $p \in \mathbb{N}^*, \gamma \in \mathbb{C}$ cu $\operatorname{Re}\gamma > p$ şi fie $g \in \Sigma K_p(h)$. Avem h convexă în U şi*

$$\operatorname{Re}[\gamma - h(z)] > 0,\ z \in U,$$

deci, obţinem din corolarul de mai sus că

$$G = J_{p,\gamma}(g) \in \Sigma K_p(h),$$

care este echivalentă cu

$$-1 - \frac{zG''(z)}{G'(z)} \prec (\operatorname{Re}\gamma - p)z + p,\ z \in U,$$

adică $G \in \Sigma K_p(2p - \operatorname{Re}\gamma, \operatorname{Re}\gamma)$.

Următorul exemplu este un rezultat care a fost obţinut şi în paragraful 4.4.

Exemplul 5.2.2. *Fie $p \in \mathbb{N}^*$, $\gamma \in \mathbb{C}$ cu $\operatorname{Re}\gamma > p$ şi $\alpha < p < \delta \le \operatorname{Re}\gamma$. Dacă $g \in \Sigma K_p(\alpha, \delta)$, atunci*

$$J_{p,\gamma}(g) \in \Sigma K_p(\alpha, \delta).$$

5.3 Operatorul $J_{p,\gamma}$ aplicat claselor $\Sigma\mathcal{C}_{p,0}(h_1, h_2; \varphi, h)$ şi $\Sigma\mathcal{C}_{p,0}(h_2; h)$

Rezultatele prezentate în această secţiune sunt originale şi au fost trimise spre publicare. La începutul acestui paragraf vom defini câteva subclase ale clasei $\Sigma_{p,0}$ folosind subordonarea, superordonarea şi condiţia de la aproape convexitate.

Definiţia 5.3.1. *[96] Fie $p \in \mathbb{N}^*$, $h_1, h_2, h \in H(U)$ cu $h_1(0) = h_2(0) = 1$, $h(0) = p$, $h_1(z) \prec h_2(z)$ şi $\varphi \in \Sigma K_{p,0}(h)$. Definim următoarele subclase:*

$$\Sigma\mathcal{C}_{p,0}(h_1, h_2; \varphi, h) = \left\{ g \in \Sigma_{p,0} : h_1(z) \prec \frac{g'(z)}{\varphi'(z)} \prec h_2(z) \right\},$$

$$\Sigma\mathcal{C}_{p,0}(h_2; \varphi, h) = \left\{ g \in \Sigma_{p,0} : \frac{g'(z)}{\varphi'(z)} \prec h_2(z) \right\}.$$

Definiţia 5.3.2. *[96] Fie $p \in \mathbb{N}^*$ şi $h_2, h \in H(U)$ cu $h_2(0) = 1$, $h(0) = p$. Definim:*

$$\Sigma\mathcal{C}_{p,0}(h_2; h) = \left\{ g \in \Sigma_{p,0} : (\exists)\varphi \in \Sigma K_{p,0}(h) \text{ a.î. } \frac{g'(z)}{\varphi'(z)} \prec h_2(z) \right\},$$

$$\Sigma\mathcal{C}_{p,0}(h) = \left\{ g \in \Sigma_{p,0} : (\exists)\varphi \in \Sigma K_{p,0}(h) \text{ a.î. } \frac{g'(z)}{\varphi'(z)} \prec \frac{1}{p} h(z) \right\}.$$

Observaţia 5.3.1. *[96]*

1. *Dacă $H \in H(U)$, $H(0) = p$ şi $h \prec H$, atunci $\Sigma C_{p,0}(h_2; h) \subset \Sigma C_{p,0}(h_2; H)$.*
2. *Dacă $H_2 \in H(U)$, $H_2(0) = 1$ şi $h_2 \prec H_2$, atunci $\Sigma C_{p,0}(h_2; h) \subset \Sigma C_{p,0}(H_2; h)$.*
3. *Dacă $h_1, h_2, h, H \in H(U)$ cu $h_1(0) = h_2(0) = 1$, $h(0) = H(0) = p$, $h_1(z) \prec h_2(z)$ şi $\varphi \in \Sigma K_{p,0}(h) \cap \Sigma K_{p,0}(H)$, atunci*

$$\Sigma\mathcal{C}_{p,0}(h_1, h_2; \varphi, h) = \Sigma\mathcal{C}_{p,0}(h_1, h_2; \varphi, H),$$

$$\Sigma\mathcal{C}_{p,0}(h_2; \varphi, h) = \Sigma\mathcal{C}_{p,0}(h_2; \varphi, H).$$

În continuare vom prezenta câteva cazuri particulare pentru subclasele definite mai sus.

Dacă $p = 1$ şi $h_2(z) = h(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$, $z \in U$, atunci o funcţie $\varphi \in \Sigma_{1,0}$ este în clasa $\Sigma K_{1,0}(h)$ dacă şi numai dacă

$$\operatorname{Re}\left[-1 - \frac{z\varphi''(z)}{\varphi'(z)}\right] > 0,\ z \in U,$$

deci clasa funcţiilor meromorfe aproape convexe este inclusă în clasa $\Sigma\mathcal{C}_{1,0}\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)$.

Fie $\alpha < 1 \le p < \delta$. Considerăm $h_2 = h_{1,\alpha,\delta}$ şi $h = h_{p,\alpha,\delta}$, unde $h_{p,\alpha,\delta} : U \to \mathbb{C}$ este funcţia convexă cu $h_{p,\alpha,\delta}(U) = \{z \in \mathbb{C} : \alpha < \operatorname{Re} z < \delta\}$ şi $h_{p,\alpha,\delta}(0) = p$.

Ştim că funcţia $h_{p,\alpha,\delta}$ există iar ea se obţine prin compunerea unor funcţii elementare. Se observă imediat că

$$\Sigma K_{p,0}(h_{p,\alpha,\delta}) = \Sigma K_{p,0}(\alpha, \delta), \tag{5.19}$$

$$\Sigma\mathcal{C}_{p,0}(h_{1,\alpha,\delta}; \varphi, h_{p,\alpha,\delta}) = \Sigma\mathcal{C}_{p,0}(\alpha, \delta; \varphi), \text{ unde } \varphi \in \Sigma K_{p,0}(\alpha, \delta). \tag{5.20}$$

În cele ce urmează vom folosi şi notaţia mai simplă

$$\Sigma\mathcal{C}_{p,0}(h_{1,\alpha,\delta}; h_{p,\alpha,\delta}) = \Sigma\mathcal{C}_{p,0}(\alpha, \delta). \tag{5.21}$$

Teorema 5.3.1. *[96] Fie $p \in \mathbb{N}^*$ şi $\gamma \in \mathbb{C}$ cu $\operatorname{Re}\gamma > p$. Fie h_2 şi h funcţii convexe în U cu $h_2(0) = 1$, $h(0) = p$ şi fie $g \in \Sigma\mathcal{C}_{p,0}(h_2; h)$. Dacă $\operatorname{Re}[\gamma - h(z)] > 0$, $z \in U$, atunci*

$$G = J_{p,\gamma}(g) \in \Sigma\mathcal{C}_{p,0}(h_2; q),$$

unde q este soluţia univalentă a ecuaţiei diferenţiale Briot-Bouquet

$$q(z) + \frac{(p+1)zq'(z)}{\gamma - q(z)} = h(z)\,,\; z \in U,$$

cu $q(0) = p$.
Funcţia q este cea mai bună (p,p+1)-dominantă.

Observăm din demonstraţia Teoremei 5.3.1 că avem şi următorul rezultat.

Teorema 5.3.2. *[96] Fie* $p \in \mathbb{N}^*$, $\gamma \in \mathbb{C}$ *cu* $\operatorname{Re}\gamma > p$ *şi* h_2, h *funcţii convexe în* U *cu* $h_2(0) = 1$, $h(0) = p$ *şi* $\operatorname{Re}[\gamma - h(z)] > 0$, $z \in U$. *Dacă* $\varphi \in \Sigma K_{p,0}(h)$ *şi* $g \in \Sigma\mathcal{C}_{p,0}(h_2;\varphi,h)$, *atunci*

$$G = J_{p,\gamma}(g) \in \Sigma\mathcal{C}_{p,0}(h_2; J_{p,\gamma}(\varphi), q),$$

unde q este soluţia univalentă a ecuaţiei diferenţiale Briot-Bouquet

$$q(z) + \frac{(p+1)zq'(z)}{\gamma - q(z)} = h(z)\,,\; z \in U,$$

cu $q(0) = p$.
Funcţia q este cea mai bună (p,p+1)-dominantă.

Dacă se consideră îndeplinite condiţiile din ipoteza Teoremei 5.3.1, respectiv cele din ipoteza Teoremei 5.3.2, cum din Teorema 2.3.1 avem $q \prec h$, obţinem următoarele corolare:

Corolarul 5.3.1. *[96] Fie* $p \in \mathbb{N}^*$ *şi* $\gamma \in \mathbb{C}$ *cu* $\operatorname{Re}\gamma > p$. *Fie* h_2 *şi* h *funcţii convexe în* U *cu* $h_2(0) = 1$, $h(0) = p$ *şi fie* $g \in \Sigma\mathcal{C}_{p,0}(h_2;h)$. *Dacă* $\operatorname{Re} h(z) < \operatorname{Re}\gamma$, $z \in U$, *atunci*

$$G = J_{p,\gamma}(g) \in \Sigma\mathcal{C}_{p,0}(h_2;h).$$

Corolarul 5.3.2. *[96] Fie* $p \in \mathbb{N}^*$ *şi* $\gamma \in \mathbb{C}$ *cu* $\operatorname{Re}\gamma > p$. *Fie* h_2 *şi* h *funcţii convexe în* U *cu* $h_2(0) = 1$, $h(0) = p$ *şi* $\operatorname{Re} h(z) < \operatorname{Re}\gamma$, $z \in U$. *Dacă* $\varphi \in \Sigma K_{p,0}(h)$ *şi* $g \in \Sigma\mathcal{C}_{p,0}(h_2;\varphi,h)$, *atunci*

$$G = J_{p,\gamma}(g) \in \Sigma\mathcal{C}_{p,0}(h_2; J_{p,\gamma}(\varphi), h).$$

În continuare vom prezenta două rezultate referitoare la clasele particulare $\Sigma\mathcal{C}_{p,0}(\alpha,\delta)$ şi $\Sigma\mathcal{C}_{p,0}(\alpha,\delta;\varphi)$.

Teorema 5.3.3. *[96] Fie* $p \in \mathbb{N}^*$, $\alpha, \delta \in \mathbb{R}$ *şi* $\gamma \in \mathbb{C}$ *cu* $\alpha < 1 \le p < \delta \le \operatorname{Re}\gamma$. *Dacă* $g \in \Sigma\mathcal{C}_{p,0}(\alpha,\delta)$, *atunci*

$$J_{p,\gamma}(g) \in \Sigma\mathcal{C}_{p,0}(\alpha,\delta).$$

Teorema 5.3.4. *[96] Fie* $p \in \mathbb{N}^*$, $\alpha, \delta \in \mathbb{R}$ *şi* $\gamma \in \mathbb{C}$ *cu* $\alpha < 1 \le p < \delta \le \operatorname{Re}\gamma$. *Dacă* $\varphi \in \Sigma K_{p,0}(\alpha,\delta)$ *şi* $g \in \Sigma\mathcal{C}_{p,0}(\alpha,\delta;\varphi)$, *atunci*

$$J_{p,\gamma}(g) \in \Sigma\mathcal{C}_{p,0}(\alpha,\delta;\Phi),$$

unde $\Phi = J_{p,\gamma}(\varphi)$.

Menţionăm că Teorema 5.3.4 apare şi în paragraful 4.3.

Lema 5.3.1. *[96] Fie $r > 0$ şi fie $\lambda : \overline{U} \to \mathbb{C}$ o funcţie analitică în U astfel încât $\sup_{z\in\overline{U}} |\lambda(z)| = M < \infty$. Dacă $p \in H[1,1] \cap Q$ şi $p(z) + \lambda(z)zp'(z)$ este univalentă în U, atunci*

$$U(1,r) \subset \{p(z) + \lambda(z)zp'(z) : z \in U\} \Rightarrow U\left(1, \frac{r}{1+M}\right) \subset p(U).$$

Teorema 5.3.5. *[96] Fie $m, r > 0$, $p \in \mathbb{N}^*$ şi $\gamma \in \mathbb{C}$ cu $\operatorname{Re}\gamma > p$. Fie h_2 şi h funcţii convexe în U astfel încât $h_2(0) = 1$, $h(0) = p$, $\operatorname{Re}[\gamma - h(z)] > m$, $z \in U$.*

Fie $\varphi \in \Sigma K_{p,0}(h)$ şi $g \in \Sigma\mathcal{C}_{p,0}(h_1, h_2; \varphi, h)$, unde $h_1(z) = rz + 1$, $z \in U$. Presupunem că $\dfrac{g'}{\varphi'}$ este univalentă în U şi $\dfrac{J'_{p,\gamma}(g)}{J'_{p,\gamma}(\varphi)} \in Q$. Atunci

$$G = J_{p,\gamma}(g) \in \Sigma\mathcal{C}_{p,0}(q_1, h_2; \Phi, q),$$

unde

$$\Phi = J_{p,\gamma}(\varphi)$$
$$q_1(z) = \frac{rm}{m+1}z + 1,\ z \in U,$$

şi q este soluţia univalentă a ecuaţiei diferenţiale Briot-Bouquet

$$q(z) + \frac{(p+1)zq'(z)}{\gamma - q(z)} = h(z)\,,\ z \in U,$$

cu $q(0) = p$.

Funcţia q este cea mai bună (p,p+1)-dominantă.

Bibliografie

[1] M. Acu, *Some subclasses of meromorphic functions*, Filomat 21:2(2007),1-9.

[2] L.A. Aksentiev, *Sufficient conditions for univalence of regular functions*, Izv. Vyss. Ucebn. Zaved. Mat., 3(4)(1958), 3-7 (limba rusă)

[3] H.S. Al-Amiri, P.T. Mocanu, *Some simple criteria of starlikeness and convexity for meromorphic functions*, Mathematica (Cluj), 37(60), (1995), 11-21.

[4] J.W. Alexander, *Functions which map the interior of the unit circle upon simple regions*, Ann. of Math., 17(1915), 12-22.

[5] R.M. Ali, V. Ravichandran, N. Seenivasagan, *On subordination and superordination of the multiplier transformation for meromorphic functions*, Bull. Malays. Math. Sci. Soc. (2)33(2)(2010), 311-324.

[6] S.K. Bajpai, *A note on a class of meromorphic univalent functions*, Rev. Roum. Math. Pures Appl., 22(1997), 295-297.

[7] I.E. Bazilevič, *On a case of integrability in quadratures of the Loewner-Kufarev equation*, Math. Sb.,N.S.,37(79)(1955),471-476.

[8] L. Bieberbach, *Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln*, Preuss, Akad. Wiss. Sitzungsb., 1916, 940-955.

[9] L. Bieberbach, *Über einige Extremalprobleme im Gebiete der Konformen Abbildung*, Math. Ann., 77(1916), 153-172.

[10] L. Brickman, *Extreme points of the set of univalent functions,* Bull. Amer. Math. Soc. 76(1970), 372-376.

[11] L. Brickman, D.J. Hallenbeck, T.H. MacGregor, D.R. Wilken, *Convex hulls and extreme points of families of starlike and convex mappings,* Trans. Amer. Math. Soc. 185(1973), 413-428.

[12] T. Bulboacă, *On some classes of differential subordinations*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Math., 31, 1(1986),45-50.

[13] T. Bulboacă, *On some classes of differential subordinations II*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Math., 31, 2(1986),13-21.

[14] T. Bulboacă, *Classes of first-order differential subordinations* ,Mathematica (Cluj), 29(52), 1(1987), 11-17.

[15] T. Bulboacă, *Classes of first-order differential superordinations*, Demonstratio Mathematica, 352(2002), 287-292.

[16] T. Bulboacă, *Differential subordinations and superordinations. Recent results.*, Casa Cărţii de Ştiinţa, Cluj-Napoca, 2005.

[17] N.E. Cho, Ji A. Kim, *On certain classes of meromorphically starlike functions*, Internat. J. Math. & Math. Sci., vol. 18, no. 3 (1995), 463-468.

[18] H.B. Coonce,S.S. Miller, *Distortion properties of p-fold symmetric alpha-starlike functions*, Proc. Amer.Math.Soc.,44,2(1974),336-340.

[19] L. De Branges, *A proof of the Bieberbach conjecture,* Acta Math., 154(1985), 137-152.

[20] A. Derneck, *Subclasses of univalent meromorphic functions*, The Journal of Math.

[21] E. Drăghici, *On certain analytic functions with positive real part*, Bull. Korean Math. Soc.34(1997),no.1,pg.29-34.

[22] P.J. Eenigenburg, S.S. Miller, P.T. Mocanu, M.O. Reade, *On a Briot-Bouquet differential subordination*, General Inequalities 3, I.S.N.M., vol. 64, Birkhäuser Verlag, Basel (1983), 339-348.

[23] G.M. Goluzin, *Asupra unei metode variaţionale în reprezentarea conformă II,*(l. rusă), Mat. Sb. 21(1947), 83-117.

[24] G.M. Goluzin, *Teoria geometrică afuncţiilor de o variabilă complexă,* (l. rusă), Ed. de Stat pt. lit. tehnică-teoretică, Moscova-leningrad, 1952.

[25] R.M. Goel, N.S. Sohi, *On a class of meromorphic functions*, Glas. Mat. Ser. III, 17(37)(1981), 19-28.

[26] I. Graham, G. Kohr, *Geometric Function Theory in One and Higher Dimensions*, Marcel Dekker Inc., New York, 2003.

[27] T.H. Gronwall, *Some remarks on conformal representation,* Ann. of Math. 2 (1914/1915), 72-76.

[28] T.H. Gronwall, *Sur la déformation dans la représentation conforme*, C. R. Acad. Sci. Paris 162 (1916), 249-252.

[29] H. Grunsky, *Zwei Bemerkungen zur konformen Abbildung*, Jahresber. Deutsch. Math. Ver., 43(1933), 140-142.

[30] H. Grunsky, *Koeffizientenbedingungen für schlicht abbildende meromorphe Funktionen,* Math. Z. 45(1939), 29-61.

[31] D.J. Hallenbeck, S. Ruscheweyh, *Subordination by convex functions*, Proc. Amer. Math. Soc.,52(1975), 191-195.

[32] P. Hamburg, P. Mocanu, N. Negoescu, *Analiză Matematică (Funcţii complexe)*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti-1982.

[33] W. Kaplan, *Close to convex schlicht functions*, Michig. Math. J., 1, 2(1952), 169-185.

[34] P. Koebe, *Über die Uniformisierung beliebiger analitischen Kurven*, Nachr. Ges. Wiss. Götingen, Math.-phys. 1(1907), 191-210.

[35] Y. Komatu, *Distorsion theorems in relation to linear integral transforms*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston and London, 1996.

[36] Z. Lewandowski, *Sur l'identité de certaines classesde fonctions univalentes I*, Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska, Sect. A, 12(1958), 131-146.

[37] Z. Lewandowski, *Sur l'identité de certaines classesde fonctions univalentes II*, Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska, Sect. A, 14(1960), 19-46.

[38] E. Lindelöf, *Memoire sur certaines inegalités dans la théory des fonctions monogènes et sur quelques propriétés nouvelles de ces fonctions dans le voisinage d'un point singulier essentiel*, Acta Soc. Fenn., 35(1908), No. 7.

[39] K. Löwner, *Untersuchungen über die Verzerrung bei konformen Abbidungen des Einheitskreises* $|z| < 1$*, die durch Funktionen mit nichtverschwindender Ableitung geliefert werden*, S.B. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig Berichte, 69(1917), 89-106.

[40] T.H. MacGregor, *The radius of convexity for starlike functions of order 1/2*, Proc. Amer. Math. Soc., 14(1963), 71-76.

[41] T.H. MacGregor, *Applications of extreme point theory to univalent functions,* Michigan Math. J. 19(1972), 361-376.

[42] A. Marx, *Untersuchungen über schlichte Abbidungen*, Math. Ann., 107(1932-1933), 40-67.

[43] S.S. Miller, *Distortion properties of alpha-starlike functions*, Proc. Amer. Math. Soc., 38, 2(1973), 311-318.

[44] S.S. Miller, P.T. Mocanu, *Second order differential inequalities in the complex plane*, J. Math. Anal. Appl., 65(1978), 298-305.

[45] S.S. Miller, P.T. Mocanu, *Differential subordinations and univalent functions*, Michig. Math. J., 28(1981), 157-171.

[46] S.S. Miller, P.T. Mocanu, *Differential subordinations and inequalities in the complex plane*, J. Diff. Eqn., 67(1987), 199-211.

[47] S.S. Miller, P.T. Mocanu, *The theory and applicatins of second-order differential subordinations*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, math.,34, 4(1989), 3-33.

[48] S.S. Miller, P.T. Mocanu, *Integral operators on certain classes of analytic functions*, Univalent Functions, Fractional Calculus and their Applications, Halstead Press, J. Wiley & Sons, New York (1989), 153-166.

[49] S.S. Miller, P.T. Mocanu, *Classes of univalent integral operators*, J. Math. Anal. Appl., 157, 1(1991), 147-165.

[50] S.S. Miller, P.T. Mocanu, *A class of nonlinear averaging integral operator*, J. Math. Anal. Appl., 197(1996), 318-323.

[51] S.S. Miller, P.T. Mocanu, *Briot-Bouquet differential equations and differential subordinations*, Complex Variables, 33(1997), 217-237.

[52] S.S. Miller, P.T. Mocanu, *Differential subordinations. Theory and applications*, Marcel Dekker Inc. New York, Basel, 2000.

[53] S.S. Miller, P.T. Mocanu, *Subordinants of differential superordinations*, Complex Variables, 48(10), (2003), 815-826.

[54] S.S. Miller, P.T. Mocanu, *Briot-Boquet differential superordinations and sandwich theorems*, J. Math. Anal. Appl., 329(2007), 327-335.

[55] S.S. Miller, P.T. Mocanu, M.O. Reade, *On the radius of alpha-convexity*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Math., 22, 1(1977), 35-39.

[56] S.S. Miller, P.T. Mocanu, M.O. Reade, *A particular starlike integral operator*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Math., 22, 2(1977), 44-47.

[57] S.S. Miller, P.T. Mocanu, M.O. Reade, *Starlike integral operators*, Pacific J. Math., 79(1978), 157-168.

[58] S.S. Miller, P.T. Mocanu, M.O. Reade, *On some particular classes of starlike integral operators*, Babeş-Bolyai Univ., Fac. of Math., Res.Sem., Seminar of Geometric Function Theory, Preprint 4(1982), 159-165.

[59] P.T. Mocanu, *Une propriété de convexité généralisée dans la théorie de la représentation conforme*, Mathematica(Cluj), 11(34)(1969), 127-133.

[60] P.T. Mocanu, *Some integral operators and starlike functions*, Rev. Roum. Math. Pures Appl., 31,3(1986), 231-235.

[61] P.T. Mocanu, *Some simple criteria for starlikeness and convexity*, Libertas Mathematica, 13(1993), 27-40.

[62] P.T. Mocanu, *A simple convexity condition for meromorphic functions*, Bull. Math. Soc. Sc. Math. Roumanie,42(90),2(1999),115-119.

[63] P.T. Mocanu, *Some extensions of Aksentiev's univalence condition for meromorphic functions*, Complex Variables, 41(2001),29-38.

[64] P.T. Mocanu, T. Bulboacă, Gr. Şt. Sălăgean, *Teoria geometrică a funcţiilor univalente*, Casa Cărţii de Ştiinţă, Cluj-Napoca, 2006.

[65] P.T. Mocanu, D. Ripeanu, I. Şerb, *The order of starlikeness of certain integral operators*, Mathematica (Cluj), 23(46), 2(1981), 225-230.

[66] P.T. Mocanu, Gr.Şt. Sălăgean, *Integral operators and meromorphic starlike functions*, mathematica (Cluj), 32(55), 2(1990), 147-152.

[67] R. Nevanlinna, *Über die schlichten Abbildungen Einheitkreises*, Översikt av Finska Vet. Soc., Förh. (A), No. 7, 62(1920), 1-14.

[68] R. Nevanlinna, *Über die konforme Abbildung Sterngebieten*, Översikt av Finska Vet. Soc., Förh. (A), No. 6, 63(1921).

[69] M. Nunokawa, *On properties of Non-Carathéodory functions*, Proc. Japan Acad. 68(1992), 152-153.

[70] Gh. Oros, Georgia Irina Oros, *An application of Briot-Bouquet differential subordinations*, Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova. Matematica, 50(2006), 101-104.

[71] S. Owa, J. Kang, *A property of certain analytic functions*, Bull. Korean Math.Soc.32(1995),201-204.

[72] S. Ozaki, *On the theory of multivalent functions*, Sci. Rep. Tokyo Bunrika Daigaku, A, 2, 40(1935), 167-188.

[73] Ch. Pommerenke, *Univalent Functions*, Vanderhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1975.

[74] B.N. Rahmanov, *On the theory of univalent functions*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR (N.S.), 78(1951), 209-211 (limba rusă).

[75] M.O. Reade, *Sur une classe de fonctions univalentes*, C. R. Acad. Sci. Paris, 239(1954), 1758-1759.

[76] M.O. Reade, *On close-to-convex functions*, Michig. Math. J., 3(1955), 59-62.

[77] T.R. Reddy, O.P. Juneja, *Integral operators on a class of meromorphic functions*, C. R. Acad. Bulgare Sci., 40(1987), 21-23.

[78] S. Ruscheweyh, V. Singh, *On a Briot-Bouquet equation related to univalent functions*, Rev. Roum. Math. Pures Appl.,24(1979), 285-290.

[79] P. Sahoo, S. Singh, *Starlikeness conditions for an integral operator*, J. Inequal. Pure and Appl. Math., **10**(3)(2009), Art.77, 6pp.

[80] K. Sakaguchi, *A note on p-valent functions*, J. Math. Soc. Japan, 14(1962), 312-321.

[81] K. Sakaguchi, *A variational method for functions with positive real part,* J. Math. Soc. Japan 16(1964), 287-297.

[82] Gr. Şt. Sălăgean, *Subclasses of univalent functions*, Lectures Notes in Math., 1013, 362-372, Springer-Verlag, Heideberg, 1983.

[83] Gr. Şt. Sălăgean, *Meromorphic starlike univalent functions*, Babeş-Bolyai Univ., Fac. Math. and Phys. Res. Sem., Itinerant Seminar on Functional Equations, Approximation and Convexity, Preprint 7(1986), 261-266.

[84] Gr. Şt. Sălăgean, *Integral operators and meromorphic functions*, Rev. Roum. Math. Pures Appl., 33, 1-2(1988), 135-140.

[85] M. Schiffer, *Variation of the Green function and theory of p-valued functions*, Amer. J. Math. 65(1943), 341-360.

[86] C. Selvaraj, K.R. Karthikeyan, *Some inclusion relationships for certain subclasses of meromorphic functions associated with a family of integral operators*, Acta Math. Univ. Comenianae, Vol. LXXVIII, 2(2009), 245-254.

[87] S. Shams, S.R. Kulkarni, J.M. Jahangiri, *Subordination properties of p-valent functions defined by integral operators*, Int. J. Math. Math. Sci., Article ID 94572 (2006), 1-3.

[88] E. Strohhäcker, *Beiträge zur Theorie der schlichten Functionen*, Math. Z., 37(1933), 356-380.

[89] A. Totoi, *On some subclasses of starlike and convex functions*, General Mathematics, Vol. 17, No. 1 (2009), 107-114.

[90] A. Totoi, *On starlikeness of a class of integral operators for meromorphic starlike functions*, Studia Univ."Babeş Bolyai", Mathematica, Vol. LV, No. 3(2010), 229-240.

[91] A. Totoi, *On integral operators of meromorphic functions*, General Mathematics, Vol. 18, No. 3(2010), 91-108.

[92] A. Totoi, *On Inverse-Convex Meromorphic Functions*, Studia Univ."Babeş Bolyai", Mathematica, Vol. LV, No. 4(2010), 167-174.

[93] A. Totoi, *On some classes of meromorphic functions defined by a multiplier transformation*, Acta Universitatis Apulensis, No. 25(2011), 41-53.

[94] A. Totoi, *On some classes of meromorphic functions defined by subordination and superordination*, Opuscula Mathematica (va apare).

[95] A. Totoi, *Integral operators applied on classes of meromorphic functions defined by subordination and superordination*, Proceedings of the 23rd Operator Theory Conference, Timişoara, 2010 (va apare).

[96] A. Totoi, *Integral operators on some classes of meromorphic close-to-convex multivalent functions* (preprint).

[97] B.A. Uralegaddi, C. Somanatha, *Certain differential operators for meromorphic functions*, Houston J. Math., 17 (1991), 279-284.